Feuille d'exercices n° 2 : Applications, relations, calcul dans $\mathbb{R}$.

MPSI Lycée Camille Jullian

9 septembre 2022

Exercice 1 (*)

On s'intéresse aux deux applications $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \text{Ent}(\sqrt{n}) \end{array} \right.$. Déterminer quelles sont les applications injectives, surjectives et bijectives parmi f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = \text{Ent}\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 3 (**)

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F, déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $E = F = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + x - 2$, $E = F = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $E =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$, $F = \mathbb{R}^+$.
4. $i(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$, $E = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $F = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Exercice 4 (***)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array} \right.$.

1. Déterminer tous les antécédents par f du couple $(4, 4)$, puis du couple $(1, 1)$.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
3. Montrer qu'un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet un antécédent par f si et seulement si $x^2 - 4y \geqslant 0$. Représenter graphiquement l'ensemble correspondant.
4. Déterminer l'image réciproque par f d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, puis celle d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 5 (***)

Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit une application injective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit une application surjective.
3. Dans le cas où f est bijective, décrire sa réciproque f^{-1}.

Exercice 6 (**)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

Exercice 7 (**)

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Si $B \subset F$, quelle inclusion est nécessairement vérifiée entre les ensembles $f(f^{-1}(B))$ et B ?
2. À quelle condition sur f cette inclusion est-elle une égalité pour tout sous-ensemble $B \subset F$?
3. Si $A \subset E$, quelle inclusion est nécessairement vérifiée entre les ensembles $f^{-1}(f(A))$ et A ?
4. À quelle condition sur f cette inclusion est-elle une égalité pour tout sous-ensemble $A \subset E$?

Exercice 8 (*)

Dans cet exercice, on s'intéresse à quelques propriétés des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ pour des sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}$.

1. En prenant pour cette question l'ensemble A de tous les entiers naturels, la fonction $\mathbb{1}_A$ est-elle injective ? Surjective ?
2. Quels sont les ensembles A pour lesquels $\mathbb{1}_A$ n'est pas surjective ?
3. Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
4. Exprimer $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ (et démontrer la formule, bien entendu).
5. Déduire des deux questions précédentes une expression de $\mathbb{1}_{A\backslash B}$, puis de $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ (on rappelle que $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$).
6. Redémontrer beaucoup plus facilement que dans le problème de la première feuille d'exercices que la différence symétrique est une opération associative.

Exercice 9 (*****)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E \to \mathbb{N}$ bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini E pour lequel il existe une application injective de E dans $\mathbb{N}$ est dénombrable (c'est une conséquence du théorème démontré dans l'exercice suivant).

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).

Exercice 10 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ toutes les deux injectives. On veut prouver qu'il existe une bijection de X sur Y. Pour cela, on note $\varphi = f \circ g$. On définit les sous-ensembles A_i de Y par récurrence de la façon suivante : $A_0 = Y \backslash f(X)$, $A_1 = \varphi(A_0)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{i+1} = \varphi(A_i)$. On pose enfin $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

1. Montrer que les ensembles A_i sont disjoints.
2. Montrer que l'ensemble A est stable par φ (c'est-à-dire que $\varphi(A) \subset A$).
3. On pose $B = g(A)$, et $C = X \backslash B$. Montrer que $f(B) = A \backslash A_0$, et que tout élément de B possède un unique antécédent par g dans Y. On notera cet antécédent $g^{-1}(x)$. Montrer que $g^{-1}(x) \in A$.
4. On définit l'application $h : X \to Y$ en posant $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = f(x)$ si $x \in C$. Montrer que h est une bijection de X sur Y.

Exercice 11 (*)

On considère sur $\mathbb{Z}$ la relation définie de la façon suivante : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 12 (**)

On définit sur $\mathbb{R}$ une relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer la classe d'équivalence d'un réel x. Combien comporte-t-elle d'éléments ?

Exercice 13 (**)

On considère sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le nombre d'éléments appartenant à la classe d'équivalence d'un réel x (on distinguera plusieurs cas selon la valeur de x).

Exercice 14 (***)

Déterminer pour chacune des relations suivantes s'il s'agit ou non d'une relation d'ordre, et si la relation d'ordre éventuelle est totale. On déterminera également dans ce cas si l'ensemble admet un plus grand et un plus petit élément.

1. relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan.
2. relation d'inclusion sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
3. relation $\mathcal{R}$ définie par $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^b \leqslant b^a$ sur $\mathbb{N}^*$, puis sur $\{3, 4, \dots\}$.
4. relation $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ définie sur l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. relation $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leqslant y' - y$ sur $\mathbb{R}^2$. Le disque trigonométrique (centré en l'origine et rayon 1) possède-t-il un plus grand élément pour cette relation ? Une borne supérieure ?

Exercice 15 (**)

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(n, p)\mathcal{R}(n', p') \Leftrightarrow (n \leqslant n'$ et $p \leqslant p')$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'un ordre total ?
2. Existe-t-il un plus petit élément dans $\mathbb{N}^2$ pour cet ordre ? Un plus grand élément ?
3. On note $A = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$. Le sous-ensemble A admet-il un maximum et un minimum pour la relation $\mathcal{R}$? Admet-il une borne supérieure et une borne inférieure ?
4. On note $B = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2 \mid 10 < n + p < 20\}$. Mêmes questions que pour l'ensemble A de la question précédente.
5. Tout sous-ensemble majoré non vide de $\mathbb{N}^2$ admet-il une borne supérieure pour la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 16 (**)

Calculer $\inf\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^{+*}\right\}$.

Exercice 17 (**)

Soit A un sous-ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}$. On définit le **diamètre** de A comme étant le réel $\delta(A)=\sup\{|y-x|,(x,y)\in A^2\}$. Justifier que ce réel existe toujours sous les hypothèses faites sur l'ensemble A, et prouver que $\delta(A)=\sup(A)-\inf(A)$.

Exercice 18 (*)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2-5x+6=0$
2. $2x^3-4x^2+3x-1=0$
3. $x=\sqrt{x}+2$
4. $x^3+5x^2\leqslant 6x$
5. $\frac{2x-3}{x^2-4}<1$
6. $(m-1)x^2-2(m-2)x+m+1=0$ (où m est un paramètre réel inconnu ; on exprimera les solutions en fonction de ce paramètre m, en distinguant si besoin des cas selon les valeurs de m)

Exercice 19 (**)

Soient x et y deux réls tels que $0<x\leqslant y$. On note $m=\frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique des deux réels), $g=\sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $h=\frac{2xy}{x+y}$ (moyenne harmonique). Montrer que $x\leqslant h\leqslant g\leqslant m\leqslant y$.

Exercice 20 (**)

Soient x, y et z trois réels vérifiant $x\in[1,4]$, $2\leqslant y\leqslant 5$ et $|z|<3$. Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x-3y+1$
- $\frac{z}{2}$
- $\frac{1}{z-2}$
- $\frac{x(z-4)}{y-1}$
- $x(y-3)$
- $\frac{3x}{y+1}$
- x^2-4x+4
- $\sqrt{xy}-3e^{2-z}$

Exercice 21 (**)

Soient x et y deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{x+y}$.
2. En déduire que, si $x\geqslant y$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}\leqslant\sqrt{x-y}$.
3. Montrer que, si z est un troisième réel positif, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x+z}{2}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}$.
4. En déduire que, si a, b et c sont les trois côtés d'un triangle quelconque, $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Exercice 22 (* à **)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-3| \geqslant 5$
2. $|2x-4| = |3x+2|$
3. $|x^2-8x+11| = 4$
4. $|x+3| + |3x-1| < -2$
5. $|x-2| \geqslant |4x+2|$
6. $|2x-3| + |3-x| - |x-7| = 2$
7. $|e^x - 3| < 1$
8. $\sqrt{|x^2-1|} = x-5$

Exercice 23 (**)

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$. Calculer $\left|\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right|$.

Exercice 24 (* à ***)

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x) = |2x-1| - 4$
2. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{|x^2-9|}$

Exercice 25 (**)

On définit pour cet exercice une fonction f par $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Justifier soigneusement le domaine de définition de f.
2. Calculer les images suivantes, en simplifiant au maximum les résultats obtenus : $f(-2)$, $f\left(\frac{3}{5}\right)$, $f(\sqrt{2})$.
3. Déterminer toutes les limites importantes pour l'étude de la fonction f. Combien la courbe $\mathcal{C}_f$ admettra-t-elle d'asymptotes ?
4. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeurs absolues, en distinguant éventuellement plusieurs intervalles.
5. Expliquer pourquoi l'expression de la dérivée f' ne dépend pas de l'intervalle d'étude, puis calculer $f'(x)$.
6. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
7. Tracer une allure précise de la courbe $\mathcal{C}_f$.
8. Étudier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$.

Problème (***)

I. Étude d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.

On désigne par L la relation binaire définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)L(c,d)$ si $a < c$ ou ($a = c$ et $b \leqslant d$). Cette relation est connue sous le nom d'ordre lexicographique (pour des raisons qui devraient vous sembler évidentes).

1. Vérifier que L est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$, et que cet ordre est total.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ possède un minimum pour la relation L.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ ne possède pas de maximum pour la relation L.
4. On appelle chaîne de $\mathbb{N}^2$ toute suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $x_1 L x_2$, $x_2 L x_3$, …, $x_{p-1} L x_p$. L'entier p est appelé longueur de la chaîne, x_1 est la tête de la chaîne et x_p la queue de la chaîne.
   (a) Construire une chaîne de longueur 3 ayant $(1,2)$ pour tête et $(3,4)$ pour queue.
   (b) Soient $x = (a,b)$ et $y = (c,d)$ deux élements de $\mathbb{N}^2$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une chaîne ayant x pour tête et y pour queue.
   (c) Montrer que, $\forall y \in \mathbb{N}^2$, il existe une chaîne ayant $(0,0)$ pour tête et y pour queue.
5. Soit $y = (c,d)$ un élément de $\mathbb{N}^2$.
   (a) Déterminer à quelle condition sur y les longueurs des chaînes admettant $(0,0)$ comme tête et (c,d) comme queue sont majorées par une constante dépendant uniquement de y.
   (b) Dans ce cas, déterminer la longueur maximale d'une telle chaîne. Existe-t-il une unique chaîne de longueur maximale ?
   (c) Calculer le nombre total de chaînes ayant $(0,0)$ pour tête et y pour queue quand ce nombre est fini.
6. On considère l'ensemble de toutes les chaînes admettant $(0,0)$ pour tête et $y = (c,d)$ pour queue, et on définit sur ces chaînes la relation $\mathcal{R}$ par $C\mathcal{R}C'$ (ici, C et C' désignent donc des chaînes) si et seulement si la longueur de C est inférieure ou égale à celle de C'.
   Montrer que la relation $\mathcal{R}$ n'est en général pas une relation d'ordre sur l'ensemble sur lequel elle est définie.

II. Une deuxième relation sur $\mathbb{N}^2$.

On définit similairement à la première partie une relation G sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)G(c,d)$ si $a+b < c+d$ ou ($a+b = c+d$ et $b \leqslant d$).

1. Montrer que G est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer le minimum de l'ensemble $\mathbb{N}^2$ pour cette relation.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{2*} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b > 0\}$ admet aussi un minimum à préciser pour cette relation.
4. On définit des chaînes pour la relation G de la même façon qu'on l'avait fait dans la première partie pour la relation L.
   (a) Montrer que, si xGy, avec $x = (a,b)$ et $y = (c,d)$, les longueurs des chaînes admettant x comme tête et y comme queue sont majorées.
   (b) Montrer qu'il existe une longueur maximale α pour de telles chaînes.
   (c) Exprimer α en fonction de a, b, c et d.
   (d) Déterminer le nombre de chaînes de longueur maximale ayant x pour tête et y pour queue.