TD n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

5 septembre 2023

Vous trouverez dans ce document le détail des quelques études de fonctions faites en TD ou en début de cours pendant les premiers jours de votre année scolaire.

Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$

Domaine de définition : le dénominateur de notre fraction pouvant se factoriser en $(x-1)^2$, on a simplement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

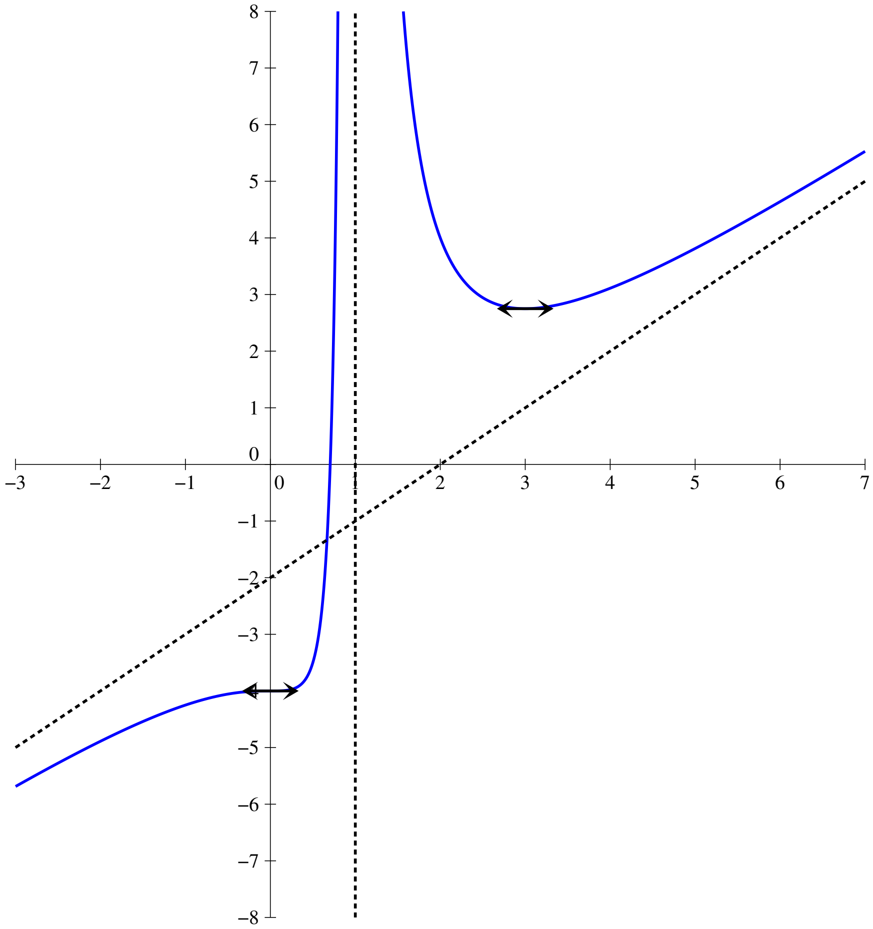
Limites et asymptotes : en utilisant la règle du quotient des termes de plus haut degré, on calcule facilement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Enfin, $\lim\limits_{x \to 1} x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = 1$, et le dénominateur de notre fraction tend vers 0 quand x tend vers 1 tout en restant toujours positif (c'est un carré !) donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$. Il y aura donc déjà une asymptote verticale d'équation $x = 1$ à la courbe représentative de f. De plus, on peut constater que $f(x) - x = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 7x - 4}{x^2 - 2x + 1}$, expression qui a pour limite -2 quand x tend vers $\pm\infty$ (toujours la règle du quotient des termes de plus haut degré). On en déduit que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (x - 2) = 0$, et donc que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à notre courbe des deux côtés.

Étude des variations : la fonction f est dérivable (et même dérivable deux fois si on souhaite étudier la convexité) sur $\mathcal{D}_f$, et $f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4}$
$= \dfrac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1) - 2(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^3} = \dfrac{3x^3 - 8x^2 + 8x - 3x^2 + 8x - 8 - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8}{(x-1)^3}$
$= \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. Aucun problème pour étudier le signe de cette dérivée :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$x^2(x-3)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$	|	$-$	‖	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-4	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{11}{4}$	↗	$+\infty$

Pour compléter ce tableau, on a eu besoin de calculer $f(0) = -4$ et $f(3) = \dfrac{27 - 36 + 24 - 4}{4} = \dfrac{11}{4}$. Les plus courageux auront naturellement envie de se lancer dans le calcul de la dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} = \dfrac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4}$
$= \dfrac{3x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$. On obtient donc à la surprise générale quelque chose d'extrêmement simple puisque $f''(x)$ est simplement du signe de x. La fonction f est donc concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, avec un point d'inflexion en 0.

Courbe :



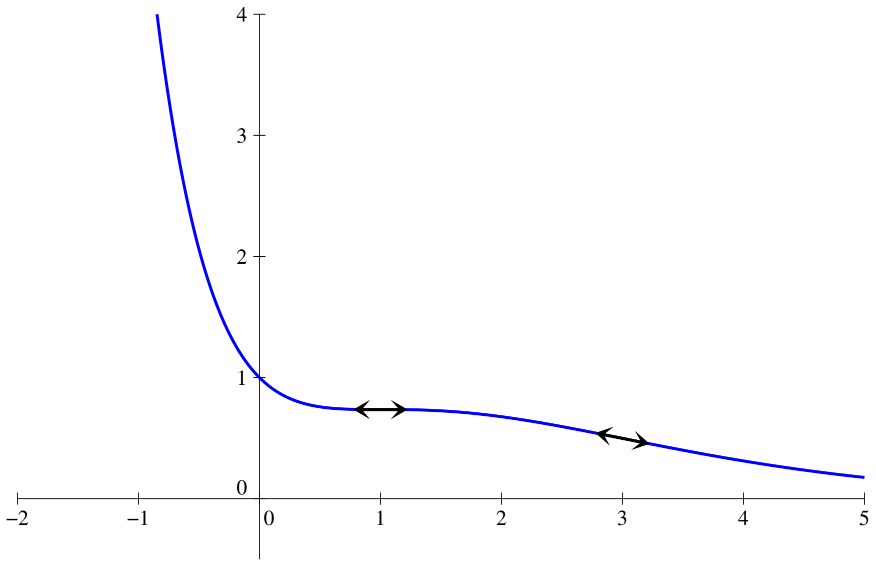
Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{e^x}$

Domaine de définition : son dénominateur ne s'annulant pas, f est définie (et dérivable autant de fois qu'on le souhaite) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Limites et asymptotes : on calcule sans difficulté $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (le dénominateur étant toujours positif). On a par contre besoin d'un résultat de croissance comparée de l'autre côté : $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{x^2}{e^x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses sera asymptote horizontale du côté de $+\infty$, et ce sera la seule asymptote à notre courbe.

Variations : on calcule bien sûr $f'(x) = \dfrac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-(x-1)^2}{e^x}$. Cette dérivée étant toujours négative, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec une annulation de la dérivée pour $x = 1$. On ne va pas s'embêter à dresser un tableau de variations qui serait ici trivial. Essayons plutôt de déterminer la convexité. En écrivant $f(x) = -e^{-x}(x-1)^2$, on calcule $f''(x) = e^{-x}(x-1)^2 - e^{-x}(2x-2) = e^{-x}(x^2-4x+3)$. Encore une fois, on tombe miraculeusement sur une dérivée seconde dont le signe s'étudie sans problème. C'est celui de $x^2 - 4x + 3$, trinôme de discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et admettant pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. La fonction f est donc convexe sur $]-\infty, 1[$ et sur $[3, +\infty[$ et concave sur $[1, 3]$, avec deux points d'inflexion aux abscisses 1 et 3. On peut d'ailleurs calculer $f(1) = \dfrac{2}{e} \simeq 0.74$ et $f(3) = \dfrac{10}{e^3} \simeq 0.5$. Les tangentes correspondantes (qui vont donc « traverser » la courbe représentative de f) ont pour pente respective $f'(1) = 0$ et $f'(3) = -\dfrac{4}{e^3} \simeq -0.2$.

Courbe :



Étude de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x) - 2\sin(x)$

Choix de l'intervalle d'étude :

Pour une fonction trigonométrique, les enjeux sont un peu différents. Bien sûr, on commence tout de même par préciser que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, mais on cherche ensuite un intervalle auquel on restreindra l'étude de la fonction en exploitant la régularité de la courbe. Déjà, f est une fonction 2π-périodique, ce qui permet de se contenter d'une étude sur un intervalle de largeur 2π. Mais f est également impaire (c'est évident dans la mesure où la fonction sinus est impaire), ce qui permet de réduire encore à une étude sur $I = [0, \pi]$. On obtiendra ensuite la courbe sur l'intervalle $[-\pi, 0]$ par symétrie (par rapport à O pour une fonction impaire), et on disposera alors d'une période complète, qu'il suffira de répéter pour avoir la courbe sur $\mathbb{R}$.

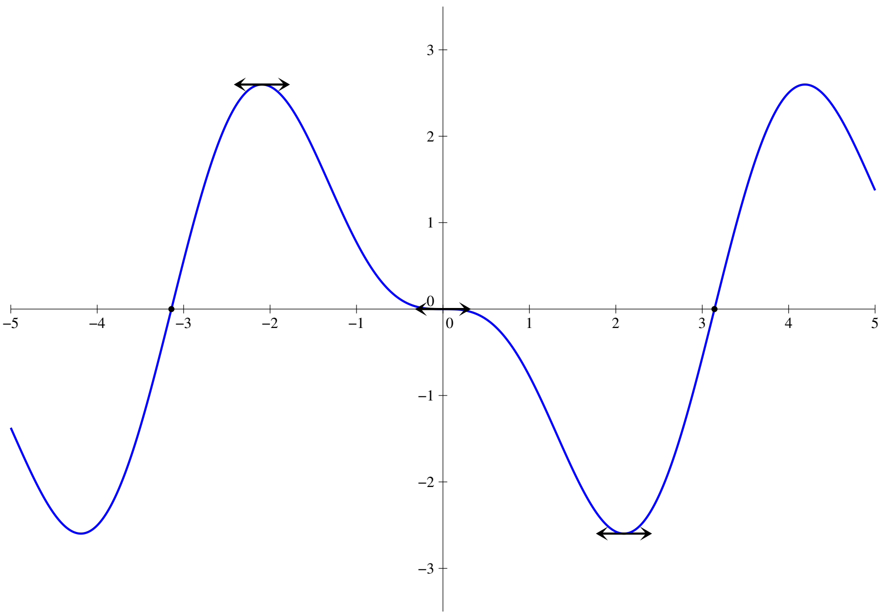
Variations :

Il n'est pas traditionnel d'étudier la convexité pour ce genre de fonctions (ici, on y arriverait mais ça donnerait des abscisses inexploitables pour les points d'inflexion), on se contentera donc des variations. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x) = 2(2\cos^2(x) - \cos(x) - 1)$ en exploitant l'une des formules de duplication trigonométrique $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. On pose $X = \cos(x)$, et on est ramenés à l'étude du signe du trinôme $2X^2 - X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et pour racines $X_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Notre dérivée s'annule donc lorsque $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = 0$ et $x = \dfrac{2\pi}{3}$ (en se restreignant aux valeurs appartenant à I). Elle est négative lorsque $\cos(x) \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$, ce qui donne le tableau suivant sur I :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

Pour compléter le tableau, on a calculé $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ et $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \simeq -2.5$. On aurait pu effectuer un tableau de variations sur $[-\pi, \pi]$ en effectuant la symétrie « dans le tableau » mais on se contentera de la répercuter sur la courbe.

Courbe :


3
2
1
0
−1
−2
−3
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5