Devoir de rentrée

MPSI Lycée Camille Jullian

4 septembre 2023

1. $\dfrac{(2\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+2)}{3\sqrt{2}-1} = \dfrac{4+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6}{3\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}-2)(3\sqrt{2}+1)}{(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+1)} = \dfrac{6+\sqrt{2}-6\sqrt{2}-2}{18-1} = \dfrac{4-5\sqrt{2}}{17}$.
2. Il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités pour le choix des chiffres, et $3 \times 3 = 9$ possibilités pour le choix des lettres, donc au total $60 \times 9 = 540$ digicodes possibles.
3. Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et c un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe (au moins) un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = c$.
4. La dérivée est donnée par $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$.
5. $z = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
6. La fonction f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ donc une de ses primitives est $F : x \mapsto \ln(x^2 - x + 1)$. Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait préciser que cette primitive n'est définie que sur les intervalles où $x^2 - x + 1 > 0$ (sur l'intervalle où cette même expression est négative, il faudrait changer le signe dans le ln).
7. $\dfrac{\sqrt{1296}}{3\sqrt{48}} = \dfrac{\sqrt{6^4}}{3\sqrt{3 \times 2^4}} = \dfrac{6^2}{3 \times 4\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
8. Avec la donnée du vecteur normal, le plan a une équation de la forme $x + 2y + 3z + d = 0$. Comme le point $(-1, 2, 1)$ appartient au plan, on en déduit que $-1 + 4 + 3 + d = 0$, soit $d = -6$. Une équation du plan est donc $x + 2y + 3z = 6$.
9. Il ne faut pas oublier de choisir laquelle des quatre pièces va tomber sur Face, ce qui donne une probabilité de $4 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{32}{81}$.
10. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(e^{-x}) = 1$. Pas de forme indéterminée, on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(e^{-x})}{\ln(x)} = 0$.
11. $\ln(72^3) - \ln(36^2) = 3\ln(72) - 2\ln(36) = 3\ln(2 \times 36) - 2\ln(36) = 3\ln(2) + \ln(36) = 3\ln(2) + 2\ln(6) = 5\ln(2) + 2\ln(3)$.
12. On pose $X = x^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 3X + 2 = 0$. Cette dernière a pour solutions triviales $X = 1$ et $X = 2$ (oui, on a le droit d'écrire un discriminant si on le souhaite). On a donc $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$, ce qui donne les quatre solutions suivantes : $\mathcal{S} = \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
13. On pose $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $v'(x) = x$ qu'on intègre en $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ pour obtenir $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\ dx = 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$.

14. On a bien sûr le droit de simplifier avant de dériver (tout étant positif, pas de souci à séparer) : $f(x) = \ln(x^2) - \ln(e^x) = 2\ln(x) - x$, donc $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1$.
15. Pour faire simple (mais pas totalement rigoureux), un point d'inflexion est un point où la dérivée seconde change de signe, et une fonction est concave si sa dérivée seconde est négative.
16. Si on a tiré une boule blanche au premier tirage, la probabilité est de $\dfrac{2}{6} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{15}$. Si on tire une boule noire au premier tirage, ce sera $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$. On ajoute les probabilités des deux cas pour obtenir au total $\dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$. En fait, c'est la même que celle de tirer une boule noire au premier tirage, ce qui est normal.
17. On a $\dfrac{88\pi}{3} = 28\pi + \dfrac{4\pi}{3}$, donc $\sin\left(\dfrac{88\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
18. $\displaystyle\int_0^1 2x^2 - 1\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - x\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.
19. Si k et n sont deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $\dbinom{n+1}{k} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1}$.
20. On fait d'abord tout passer à gauche pour se ramener à $\dfrac{-x-7}{x+2} < 0$. Un tout petit tableau de signe si besoin, et on conclut que $\mathcal{S} =]-\infty, -7[\cup]-2, +\infty[$.