Programme de colle n° 9

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 27/11 au 01/12 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 6 : Techniques de calcul algébrique.

- démonstration par récurrence et variations (récurrence double, récurrence forte).
- sommes finies :
  — notation $\sum$, règles de calcul (linéarité, relation de Chasles, changement d'indice)
  — **calcul des sommes classiques** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i$
  — exemples de calculs de sommes télescopiques (comme pour les intégrales dans le chapître précédent, on s'appuiera si besoin sur une version simplifiée du théorème de décomposition en éléments simples, avec des racines réelles simples au dénominateur).
  — exemples de calculs de sommes doubles, du type $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$ ou $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ (l'écriture sous forme de deux calculs de sommes imbriqués doit être absolument maîtrisé, sans erreur sur la gestion des indices, dans un sens comme dans l'autre).
- produits finis : notation, règles de calcul, factorielle d'un nombre entier naurel.
- coefficients binômiaux $\displaystyle\binom{n}{k}$:
  — définition comme quotients de factorielles (on a évoqué la vision combinatoire du nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, mais aucune interprétation combinatoire n'est exigible)
  — formules classiques : **symétrie des coefficients binômiaux**, **formule** $k\displaystyle\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, **relation de Pascal** (démonstration purement calculatoires, même si on a évoqué l'interprétation combinatoire de la relation de Pascal).
  — triangle de Pascal
  — **formule du binôme de Newton** (démonstration effectuée par récurrence)
  — formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, factorisation de $a^n - b^n$ sous la forme $(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
- petits systèmes linéaires :
  — vocabulaire (systèmes linéaire, système carré, système triangulaire, système incompatible, système de Cramer)

— opérations élémentaires sur les lignes d'un système, algorithme du pivot de Gauss pour la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues (le cas général n'a pas été traité pour l'instant)
— exemples de résolution de systèmes à paramètre
— aucune interprétation ou méthode de résolution matricielle n'a été abordée pour l'instant

Chapitre 7 : Suites numériques.

- Compléments sur la structure de l'ensemble $\mathbb{R}$: droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, intervalles de $\mathbb{R}$, voisinages d'un élément de $\mathbb{R}$ ou de $\overline{\mathbb{R}}$ (notions définies pour éclairer les définitions ultérieures sur les limites mais qui ne sont jamais réellement exploitées en pratique ; j'ai également profité de l'occasion pour donner un peu de vocabulaire topologique : ouvert, fermé, intérieur, adhérence), sous-ensembles denses de $\mathbb{R}$, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Notations générales sur les suites (terme général, terme d'indice n d'une suite, on fera évidemment attention à ne pas confondre u_n et (u_n)), différents types de définition possibles d'une suite (formule explicite, relation de récurrence simple, double ou pire, définition implicite).
- Vocabulaire général sur les suites (suites monotones, suites majorées, minorées, bornées, stationnaires).
- Suites usuelles :
  — suites arithmétiques : définition par récurrence, **formule explicite pour le terme général**, monotonie, **sommes partielles**
  — suites géométriques : définition par récurrence, formule explicite, monotonie, sommes partielles
  — suites arithmético-géométriques : équation de point fixe associée, calcul du terme général de la suite (on doit revérifier à chaque fois que la suite auxiliaire définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique)
  — suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : équation caractéristique, formules pour le calcul du terme général (l'analogie avec les équations différentielles, tout comme dans le cas des suites arithmético-géométriques, a été soulignée, mais aucune connaissance n'est exigible dans le cas de « seconds membres » pour ces équations, les élèves devront être guidés si vous souhaitez poser ce genre d'exercices)
- Limites de suites :
  — définition des limites (finies et infinies) « avec des ε », exemples très simples de manipulation
  — **unicité de la limite**
  — sous-suites, convergence des sous-suites d'une suite convergente, si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l alors (u_n) converge vers l
  — théorème de convergence monotone, théorème de Bolzano-Weierstraß
- PAS de suites adjacentes pour cette semaine, et les méthodes spécifiques d'étude de suites implicites ou de suites récurrentes seront vus lors de chapitres ultérieurs.

Prévisions pour la semaine suivante : suites (avec les suites adjacentes).