

# Programme de colle n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 02/10 au 06/10 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 2 : Applications, relations.

- Méthodes de calcul sur les nombres réels :
  - ordre naturel sur  $\mathbb{R}$ , existence d'une borne supérieure (ou inférieure) pour un sous-ensemble non vide et majoré (minoré) de  $\mathbb{R}$ , **caractérisation de la borne supérieure** (on doit pouvoir démontrer une des deux implications).
  - règles de calcul sur les manipulations d'inégalités et d'encadrements, utilisation de tableaux de signes
  - rappels sur les identités remarquables (y compris  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$  et la factorisation de  $a^3 - b^3$ ), sur le signe d'un trinôme du second degré, et sur la factorisation d'un polynôme de degré supérieur admettant une racine évidente (les deux méthodes de factorisation, par division euclidienne ou par identification des coefficients, sont acceptées)
  - valeurs absolues : définition comme distance entre  $x$  et 0, résolution d'équations du type  $|x - a| = b$  ou  $|a(x)| = |b(x)|$  et d'inéquations du type  $|x - a| \geq b$  ou  $|x - a| \leq b$ , propriétés élémentaires de la valeur absolue (notamment l'inégalité triangulaire), utilisation de « tableaux de signes » pour la résolution d'équations ou inéquations plus complexes, représentation graphique de la fonction valeur absolue, étude d'une fonction définie par une équation du type  $f(x) = |g(x)|$

## Chapitre 3 : Fonctions usuelles.

- Généralités sur les fonctions :
  - parité (les symétries par rapports à des points autres que l'origine ou des axes verticaux autres que l'axe des ordonnées ont été cités mais ne sont pas officiellement au programme), périodicité
  - obtention de la courbe de  $x \mapsto f(x) + a$ ,  $x \mapsto f(x + a)$ ,  $x \mapsto af(x)$ ,  $x \mapsto f(ax)$  à partir de celle de  $f$  (le concept d'affinité orthogonale n'est pas au programme, une description intuitive suffit)
  - monotonie d'une fonction, sens de variation d'une somme ou d'une composée de fonctions monotones
  - formulaire de dérivation (rien n'a été démontré, et la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement n'a pas été évoquée, il s'agit simplement de donner des outils de

- calcul pour l'instant), y compris la dérivée générale d'une composée et la dérivée d'une réciproque, lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction, équation de la tangente à une courbe en un point
- dérivées d'ordre supérieur, notation  $f^{(n)}$ , fonctions de classe  $D^k$ ,  $\mathcal{C}^k$  ou  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle, lien entre signe de la dérivée seconde et la convexité
  - théorème de la bijection continue
  - Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances :
    - logarithme népérien : définition comme primitive de la fonction inverse, **règles de calcul** (on doit notamment savoir démontrer la formule  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$  à l'aide d'un calcul de dérivée), limites et courbe représentative
    - exponentielle de base  $e$  : définition comme réciproque de  $\ln$ , règles de calcul, limites et courbe représentative
    - logarithmes et exponentielles de base quelconque : définition, variations et allures de courbes
    - fonction puissances : définition par récurrence des puissances entières positives d'un réel, règles de calcul, parité, limites et allure des courbes représentatives des fonctions correspondantes ; définition des racines  $n$ -èmes sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$  selon la parité de  $n$  comme réciproques des puissances entières, allures de courbes ; définition de  $x^a$  comme égal à  $e^{a \ln(x)}$  lorsque  $a$  est un réel « quelconque », variations et limites des fonctions correspondantes
    - résultats de croissances comparées, limites classiques de taux d'accroissement (notamment  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ )
    - exemples d'équations ou d'inéquations faisant intervenir les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

Prévisions pour la semaine suivante : tout le chapitre 3, avec les fonctions hyperboliques et la partie entière.