Programme de colle n° 12

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 18/12 au 22/12 2023

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 7 : Nombres complexes.

- Structure de l'ensemble $\mathbb{C}$:
  - forme algébrique, parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe
  - identification de $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{R}^2$, image d'un nombre complexe dans le plan, affixe complexe d'un point du plan
  - somme, produit de deux nombres complexes, conjugué, module d'un nombre complexe et **propriétés élémentaires** (compatibilité du produit et du quotient avec la conjugaison et le calcul de module notamment), interprétation géométrique de la conjugaison et du module
  - inégalité triangulaire $||z|-|z|'| \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|$ (la **démonstration** de l'inégalité de droite peut être demandée)
  - équations de cercles (on doit être capable de reconnaitre un cercle à partir de n'importe quelle forme de son équation)
  - écriture exponentielle des nombres complexes de module 1, argument d'un nombre complexe, propriétés de l'argument
- Applications du calcul complexe en trigonométrie :
  - formules d'Euler, formule de Moivre
  - calcul de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$
  - linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$
  - factorisation par l'angle moitié pour obtenir la forme exponentielle d'expressions du type $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$, ou $e^{ip}+e^{iq}$, application aux formules trigonométriques de transformation somme-produit et au calcul de sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes (via calcul d'une racine carrée de Δ sous forme algébrique).
- Racines n-èmes de nombres complexes :
  - racines n-èmes de l'unité : **formule explicite**, interprétation géométrique (on doit savoir que les racines n-èmes forment un polygone régulier centré en l'origine), **nullité de la somme des racines n-èmes**
  - calcul des racines n-èmes d'un nombre complexe sous forme exponentielle

- Étude de quelques fonctions complexes, prétexte à questions d'interprétation géométrique (du style « Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ » pour obtenir une équation de cercle)
- Application des nombres complexes à la géométrie :
  — affixe complexe d'un vecteur, calcul d'un produit scalaire ou d'un déterminant comme partie réelle ou imaginaire de $\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}$
  — écriture complexe des translations, rotations, homothéties, symétries par rapport aux axes du repère
  — classification des isométries et similitudes du plan à l'aide des nombres complexes (on doit être capable, à partir de l'expression explicite d'une similitude directe, de déterminer son type, et le cas échéant son centre, son angle et son rapport)

Chapitre 8 : Structures algébriques.

- Groupes :
  — loi de composition interne (lci) sur un ensemble, associativité, commutativité d'une lci, partie stable par une lci
  — élément neutre pour une lci, **unicité de l'élément neutre**, symétrisabilité d'un élément pour une lci (opposé pour une loi additive, inverse pour une loi multiplicative), **unicité du symétrique pour une loi associative**
  — groupe, sous-groupe, caractérisation des sous-groupes par la stabilité par la lci et par symétrisation, groupe des permutations d'un ensemble, groupe produit de deux groupes
  — morphismes de groupes (et endomophismes, isomorphismes, automorphismes), propriétés élémentaires (image du neutre par un morphisme, image du symétrique par un morphisme, image ou image réciproque d'un sous-groupe), noyau et image d'un morphisme, **caractérisation de l'injectivité** et de la surjectivité d'un morphisme à l'aide du noyau et de l'image, groupe $Aut(G)$ des automorphismes d'un groupe G pour l'opération de composition
- Anneaux et corps ne sont **pas** au programme cette semaine.

Prévisions pour le semaine suivante : structures algébriques, continuité.