Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

29 avril 2024

1. Le dénominateur de la fraction se factorise sous la forme $X^3+X^2+X = X(X^2+X+1) = X$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3$ et pour racines $X_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$, et $X_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{j}$. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sera donc de la forme $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-j} + \dfrac{\overline{b}}{X-\overline{j}}$ (pas de partie entière puisque le numérateur de F est de degré 2 et son dénominateur de degré 3, et les numérateurs des parties polaires complexes sont conjugués puisque F est à coefficients réels). On calcule les deux coefficients a et b de façon classique : en multipliant par X puis en évaluant pour $X=0$, on a $\dfrac{-1}{1} = a$, donc $a=-1$. En multipliant par $X-j$ avant d'évaluer pour $X=j$, on trouve $\dfrac{2j^2-1}{j(j-\overline{j})} = b$, soit $b = \dfrac{2j^2-1}{j^2-1}$, puisque $j\overline{j} = |j|^2 = 1$. On sait par ailleurs que $1+j+j^2=0$, donc $b = \dfrac{-2j-3}{-j-2} = \dfrac{(2j+3)(\overline{j}+2)}{(j+2)(\overline{j}+2)} = \dfrac{2+j+3(j+\overline{j})+6}{1+2(j+\overline{j})+4} = \dfrac{5+j}{3}$ puisque $j+\overline{j} = -1$. La décomposition de F dans $\mathcal{C}(X)$ est donc $F = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{9+i\sqrt{3}}{6(X-j)} + \dfrac{9-i\sqrt{3}}{6(X-\overline{j})}$.
   On regroupe les deux derniers termes pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$: $F = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{(9+i\sqrt{3})(X-\overline{j})+(9-i\sqrt{3})(X-j)}{6(X^2+X+1)} = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{3X+1}{X^2+X+1}$.
2. Il faut cette fois-ci commencer par une division euclidienne :

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
 & X^5 & + & X^4 & & & & & & & - & 1 & X^3 - X \\ \cline{13-13}
- & (X^5 & & & - & X^3) & & & & & & & X^2+X+1 \\
 & & & X^4 & + & X^3 & & & & & - & 1 & \\
 & & - & (X^4 & & & - & X^2) & & & & & \\
 & & & & & X^3 & + & X^2 & & & - & 1 & \\
 & & & & - & (X^3 & & & - & X) & & & \\
 & & & & & & & X^2 & + & X & - & 1 &
\end{array}
$$

   On peut donc écrire $F = X^2+X+1+\dfrac{X^2+X-1}{X^3-X}$. Le dénominateur de la fraction restante se factorise immédiatement en $X(X-1)(X+1)$, il peut donc se décomposer sous la forme $\dfrac{X^2+X-1}{X^3-X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$. On peut par exemple appliquer la méthode classique vue en cours de « dérivation du dénominateur » pour trouver les trois constantes. On évalue donc la fraction $\dfrac{X^2+X-1}{3X^2-1}$ en 0 pour obtenir $a=1$, en 1 pour obtenir $b=\dfrac{1}{2}$, et en -1 pour obtenir $c = -\dfrac{1}{2}$. Il est temps de conclure : $F = X^2+X+1+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{2(X+1)}$.
3. Ne surtout pas se lancer dans des calculs pénibles on pose simplement $Y = X-1$, donc $X =$

$Y+1$: $F = \dfrac{(Y+1)^4-(Y+1)^2+1}{Y^4} = \dfrac{Y^4+4Y^3+6Y^2+4Y+1-Y^2-2Y-1+1}{Y^4} = \dfrac{Y^4+4Y^3+5Y^2+2Y+1}{Y^4} = 1+\dfrac{4}{Y}+\dfrac{5}{Y^2}+\dfrac{2}{Y^3}+\dfrac{1}{Y^4}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $F = 1+\dfrac{4}{X-1}+\dfrac{5}{(X-1)^2}+\dfrac{2}{(X-1)^3}+\dfrac{1}{(X-1)^4}$.

4. Dans le cas des pôles doubles, le plus rapide est d'appliquer la méthode vue en cours. On commence par poser $G=(X-1)^2F = \dfrac{X-2}{(X+1)^2}$, et calculer $G' = \dfrac{(X+1)^2-2(X+1)(X-2)}{(X+1)^4} = \dfrac{X+1-2(X-2)}{(X+1)^3} = \dfrac{-X+5}{(X+1)^3}$. Comme $G(1) = -\dfrac{1}{4}$ et $G'(1) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, la partie polaire associée au pôle 1 dans la décomposition en éléments simples de F sera $\dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{4(X-1)^2}$. On procède de même pour l'autre pôle, en posant $H = (X+1)^2F = \dfrac{X-2}{(X-1)^2}$ et en dérivant : $H' = \dfrac{(X-1)^2-2(X-1)(X-2)}{(X+1)^4} = \dfrac{-X+3}{(X-1)^3}$. Comme $H(-1) = -\dfrac{3}{4}$ et $H'(-1) = \dfrac{1}{2}$, la deuxième partie polaire de notre décomposition sera $\dfrac{1}{2(X+1)} - \dfrac{3}{4(X+1)^2}$. Pas de partie entière à calculer, on peut directement conclure : $F = \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{4(X-1)^2} - \dfrac{1}{2(X+1)} - \dfrac{3}{4(X+1)^2}$.

5. Ici, la décomposition sera de la forme $F = \dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{c}{X^3}+\dfrac{d}{X-1}+\dfrac{e}{X+1}$. On calcule facilement les coefficients d et e (on peut même n'en calculer qu'un seul en exploitant la parité si on est motivé) : en multipliant par $X-1$ avant d'évaluer en 1, on a $d=\dfrac{1}{2}$, et en multipliant par $X+1$ avant d'évaluer en -1, $e=\dfrac{1}{2}$. Il suffit ensuite de calculer $F-\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1}{2(X+1)} = \dfrac{2-X^3(X+1)-X^3(X-1)}{2X^3(X-1)(X+1)} = \dfrac{2-2X^4}{2X^3(X^2-1)} = \dfrac{(1+X^2)(1-X^2)}{X^3(X^2-1)} = \dfrac{-X^2-1}{X^3} = -\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X^3}$. On peut conclure : $F = -\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X^3}+\dfrac{1}{2(X-1)}+\dfrac{1}{2(X+1)}$.

6. On va se contenter ici de divisions euclidiennes successives :

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & X^4 & & & -\ 2X & & & X^2-X+2 \\
\cline{8-8}
-\ (X^4 & -\ X^3 & +\ 2X^2) & & & & & X^2+X-1 \\
 & & X^3 & -\ 2X^2 & -\ 2X & & & \\
 & -\ (X^3 & -\ X^2 & +\ 2X) & & & & \\
 & & & -\ X^2 & -\ 4X & & & \\
 & & +\ (X^2 & -\ X & +\ 2) & & & \\
 & & & & -\ 5X & +\ 2 & & \\
\end{array}
$$

Une deuxième division suffira à achever le travail, et celle-ci n'a même pas vraiment besoin d'être posée : $X^2+X-1 = 1\times(X^2-X+2)+2X-3$. On peut donc conclure facilement : $F = \dfrac{(X^2-X+2)^2+(2X-3)(X^2-X+2)-5X+2}{(X^2-X+2)^3} = \dfrac{1}{X^2-X+2}+\dfrac{2X-3}{(X^2-X+2)^2}+\dfrac{-5X+2}{(X^2-X+2)^3}$.