Interrogation Écrite n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

25 janvier 2024

Énoncé modifié :

1. (a) On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$. Les coefficients hors diagonale de A^2 sont doubles de ceux de A, donc $a = 2$, et on déduit $b = 1$ en observant la diagonale. Autrement dit, $A^2 = 2A + I_2$.

   (b) On peut écrire la relation précédente sous la forme $A(A - 2I_2) = I_2$, ce qui prouve à la fois que A est inversible et que $A^{-1} = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Pour $n = 0$, la formule donne $B^0 = I_2$, ce qui est évidemment vrai. Supposons la formule correcte pour un certain entier n, alors $B^{n+1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-4n & 4n \\ -4n & 1+4n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+12n-16n & -12n+4+16n \\ -4+16n-20n & -16n+5+20n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-4n & 4+4n \\ -4-4n & 5+4n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4(n+1) & 4(n+1) \\ -4(n+1) & 1+4(n+1) \end{pmatrix}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

   (b) La formule donne pour $n = -1$ la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, dont on vérifie facilement qu'elle est bien l'inverse de la matrice B en la multipliant par B pour obtenir I_2.

3. (a) En posant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, un calcul trivial donne $JMJ = \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d \\ a+b+c+d & a+b+c+d \end{pmatrix} = (a+b+c+d)J$.

   (b) Avec les mêmes notations que ci-dessus, $JM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ et $MJ = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si $b = c$ et $a = d$ (deux paires d'équations identiques sur les quatre). Les matrices qui commutent avec J sont donc celles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) Si $J = M^2 + M$, en multipliant simplement par M à gauche ou à droite, on a $MJ = M(M^2 + M) = M^3 + M^2 = (M^2 + M)M = JM$, donc les matrices commutent.

   (d) On cherche donc des solutions de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, pour lesquelles $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$. Ces matrices sont solutions si elles vérifient les deux équations $a^2 + b^2 + a = 1$ et $2ab + b = 1$ (les deux autres équations étant identiques). La somme des deux équations donne $a^2 + b^2 + 2ab + a + b = 2$, soit $(a+b)^2 + a + b = 2$. Autrement dit, $a + b$ est solution de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$, qui a pour solutions évidentes 1 et -2. Si $a + b = 1$, alors $a = 1 - b$, soit en reportant dans la deuxième équation du système initial $2b(1-b) + b = 1$, donc $-2b^2 + 3b - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et pour solutions $b_1 = \dfrac{-3-1}{-4} = 1$ (qui donne $a = 0$) et $b_2 = \dfrac{-3+1}{-4} = \dfrac{1}{2}$ (qui donne $a = \dfrac{1}{2}$). Si $a + b = -2$, on a cette fois $a = -2 - b$, donc $2b(-2-b) + b - 1 = 0$, soit $2b^2 + 3b + 1 = 0$, qui a pour solutions $b_3 = -1$ (qui donne $a = -1$) et $b_4 = -\dfrac{1}{2}$ (qui donne $a = -\dfrac{3}{2}$). Finalement, quatre matrices sont solutions de l'équation : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ou si on préfère $J - I_2$), $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}J$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -J$, et $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}J - I_2$.

4. Histoire de ne pas faire comme tout le monde résolvons le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & iy & + & z & = & a \\ x & + & (1+i)y & + & (2+i)z & = & b \\ x & + & iy & + & 2z & = & c \end{array} \right.$.
Les opérations $L_2 - L_1$ et $L_3 - L_1$ donnent les nouvelles équations $y + (1+i)z = b - a$ et $z = c - a$, dont on déduit directement (le système est maintenant triangulaire) $z = c - a$, $y = b - a - (1+i)(c-a) = ia + b - (1+i)c$, et $x = a - i(ia + b - (1+i)c) - (c - a) = 3a - ib + (i-2)c$.
La matrice est donc inversible, et son inverse est $\begin{pmatrix} 3 & -i & i-2 \\ i & 1 & -i-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.