Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

30 novembre 2023

Énoncé :

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \varepsilon$

2. $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2ij + j^2 = \sum_{i=1}^{n} ni^2 + n(n+1)i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)}{6}(2n+1+3n+3+2n+1) = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

3. On va utiliser un pivot de Gauss, mais en éliminant d'abord l'inconnue z qui a des coefficients plus sympathiques :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & z & = & 6 \\ -4x & + & y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 8x & - & y & & & = & 13 \\ -2x & - & 2y & & & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 8x & - & y & & & = & 13 \\ -18x & & & & & = & -27 \end{array}\right.$$
Il ne reste plus qu'à remonter le système triangulaire obtenu : $x = \dfrac{27}{18} = \dfrac{3}{2}$, puis $y = 8x - 13 = -1$ et enfin $z = \dfrac{1}{2}(1 + 3y - 2x) = -\dfrac{5}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{3}{2}, -1, -\dfrac{5}{2}\right)\right\}$.

4. Il s'agit bien sûr d'une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x = \dfrac{1}{2}x + 3$ a pour solution $x = 6$. On définit donc une suite auxiliaire par $v_n = u_n - 6$ et on vérifie qu'elle est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \dfrac{1}{2}(u_n - 6) = \dfrac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -2$, donc on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2 \times \dfrac{1}{2^n} = -\dfrac{1}{2^{n-1}}$, puis $u_n = v_n + 6 = 6 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. On peut donc calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 6 - \frac{2}{2^k} = 6(n+1) - 2 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6(n+1) - 4\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 6n + 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

5. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$ et admet deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ et $r_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$. Il existe donc deux réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A \times 2^n + \dfrac{B}{2^n}$. En particulier, pour $n = 0$, on a $A + B = u_0 = -1$ et pour $n = 1$, on a $2A + \dfrac{1}{2}B = u_1 = 1$. En

multipliant par 2 la deuxième équation et en soustrayant la première, $3A = 3$ donc $A = 1$, dont on déduit $B = -2$. Finalement, $u_n = 2^n - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

6. On va bien sûr procéder par décomposition en éléments simples puis télescopage :
   - $k^3 + 4k^2 + 3k = k(k^2 + 4k + 3) = k(k+1)(k+3)$ (on peut calculer un discriminant si c'est vraiment nécessaire)
   - il existe donc trois réels a, b et c tels que $\dfrac{2}{k^3 + 4k^2 + 3k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+3}$. En multipliant par k avant de poser $k = 0$, on trouve $a = \dfrac{2}{3}$; en multipliant par $k+1$ puis en posant $k = -1$, on a $b = -1$; enfin, en multipliant par $k+3$ avant de poser $k = -3$, $c = \dfrac{1}{3}$. On conclut : $\dfrac{2}{k^3 + 4k^2 + 3k} = \dfrac{2}{3k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{3(k+3)}$.
   - on termine le calcul à coups de décalages d'indices : $S_n = \dfrac{2}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+3} = \dfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{3}\sum_{k=4}^{n+3} \dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{2}{3}\sum_{k=4}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+1} - \sum_{k=4}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}\right) + \dfrac{1}{3}\sum_{k=4}^{n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{11}{6} - \dfrac{5}{6} - \dfrac{2}{3(n+1)} + \dfrac{1}{3(n+2)} + \dfrac{1}{3(n+3)} = \dfrac{7}{18} - \dfrac{2}{3(n+1)} + \dfrac{1}{3(n+2)} + \dfrac{1}{3(n+3)}$.