Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

19 octobre 2023

1. Consulter le cours si besoin...
2. Méthode la plus simple ici, on remplace le membre de droite par $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3}\right) - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, et l'égalité des cosinus donne les deux possibilités $2x \equiv x + \frac{\pi}{6} [2\pi]$, soit $x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$; et $2x \equiv -x - \frac{\pi}{6} [2\pi]$, soit $x \equiv -\frac{\pi}{18} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
3. On effectue bien sûr une IPP en posant $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = \operatorname{sh}(x)$ qu'on intègre en $v(x) = \operatorname{ch}(x)$. On en déduit que $I_1 = [x \operatorname{ch}(x)]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} \operatorname{ch}(x)\ dx = \ln(2)\operatorname{ch}(\ln(2)) - [\operatorname{sh}(x)]_0^{\ln(2)} = \ln(2)\operatorname{ch}(\ln(2)) - \operatorname{sh}(\ln(2))$. On ne va évidemment pas se contenter de cette forme : $\operatorname{ch}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$. De même, $\operatorname{sh}(\ln(2)) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$, puis $I_1 = \frac{5}{4}\ln(2) - \frac{3}{4}$.
4. Posons donc $t = \sqrt{x}$, soit $x = t^2$ (ce qui est bien bijectif sur l'intervalle d'intégration, même si le $\sqrt{x}$ du dénominateur pose problème en $x = 0$), les bornes de l'intégrale deviennent 0 et $\sqrt{3}$, et $dx = 2t\ dt$, donc $I_2 == \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t}{(1+t^2)t}\ dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\ dt = 2[\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}$.
5. La formule ne peut avoir un sens que si $x \in]-1,1[$. La méthode la plus simple consiste à poser $x = \sin(t)$, avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui est toujours possible lorsque $x \in]-1,1[$. Le membre de gauche de l'égalité se simplifie alors en t (on est dans le bon intervalle), et celui de droite s'écrit $\arctan\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\right)$. Or, vu l'intervalle choisi pour t, $\cos(t) > 0$, donc on peut encore simplifier notre membre de droite en $\arctan\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right) = \arctan(\tan(t)) = t$ car t est à nouveau dans le bon intervalle pour cette dernière simplification. On a donc prouvé la formule pour tout réel $x \in]-1,1[$.

   Autre méthode possible, on commence par poser $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, qu'on dérive (ce qui est possible sur $]-1,1[$) en $g'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. On dérive ensuite $f(x) = \arctan(g(x))$ pour obtenir $f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1-x^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On reconnait bien sûr la dérivée de la fonction arcsin. Les fonctions f et arcsin étant définies et dérivables sur $]-1,1[$, elles y sont égales à une constante près. Comme $f(0) = \arcsin(0) = 0$, on en déduit la formule demandée.

6. On commence par factoriser le dénominateur sous la forme $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ (calculs laissés en exercice au lecteur si besoin), puis on effectue une décomposition en éléments simples de la forme $\dfrac{x}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On peut calculer a et b à coups d'astuces : on multiplie par $x-2$ puis on pose $x=2$ pour obtenir $\dfrac{2}{2-3}=a$, soit $a=-2$. On multiplie par $x-3$ puis on pose $x=3$ pour obtenir de même $\dfrac{3}{3-2}=b$, soit $b=1$. On conclut enfin le calcul d'intégrale : $I_3=\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}\,dx=[3\ln(3-x)-2\ln(2-x)]_0^1=$ $3\ln(2)-3\ln(3)+2\ln(2)=5\ln(2)-3\ln(3)$.