

Devoir Surveillé n° 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

8 juin 2024

Exercice 1

1. On est ici en présence d'un schéma de Bernoulli (déplacements indépendants, probabilité p constante d'aller vers la droite, et on répète n fois l'expérience en comptant le nombre de déplacements vers la droite), donc $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. En particulier, $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = npq$. Puisque la particule part de la position n_0 et qu'elle effectue en moyenne np déplacements vers la droite et nq déplacements vers la gauche, elle sera en moyenne après ces déplacements en position $n_0 + n(p - q)$. Par exemple, si $p = q = \frac{1}{2}$, la position moyenne après les déplacements sera la même que la position initiale, ce qui est logique.

2. Dans ce cas, $X_4 \sim \mathcal{B}\left(4, \frac{2}{3}\right)$, et la particule se retrouve en position 0 après quatre déplacements si et seulement si elle a effectué deux déplacements vers la droite et deux vers la gauche.

Autrement dit, la probabilité recherchée vaut $\mathbb{P}(X_4 = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{27}$.

Sur les six possibilités formées de deux déplacements à droite et deux à gauche, il y en a quatre qui font passer la particule par la position -1 : GGDD (deux pas à gauche puis deux pas à droite), GDGD, GDDG, DGGD (les deux derniers, DDGG et DGDG, ne conviennent pas). Chacune des six possibilités ayant la même probabilité, la probabilité conditionnelle demandée vaut $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3. (a) Par hypothèse, si la particule démarre en position 0, elle ne bougera jamais et s'arrêtera donc en position 0 avec probabilité 1, sans faire le moindre déplacement. De même, si elle part de la position N , elle ne bougera pas non plus, et ne rejoindra donc jamais la position 0.
- (b) Puisqu'on a supposé $k \neq 0$ et $k \neq N$, la particule fera au moins un déplacement. Distinguons deux cas selon le premier déplacement effectué : si elle part initialement vers la droite (probabilité p), elle se retrouve en position $k+1$ et a désormais une probabilité a_{k+1} de finir sa course en position 0 (on peut « oublier » le premier déplacement puisque tout est indépendant). On a donc une probabilité pa_{k+1} que la particule termine en position 0 en ayant fait un premier pas à droite. De même, on aura une probabilité qa_{k-1} de finir en 0 en faisant un premier pas vers la gauche. Les deux cas traités étant les seuls possibles (et incompatibles), $a_k = pa_{k+1} + qa_{k-1}$.
- (c) La suite (a_k) est récurrente linéaire d'ordre 2 (le fait qu'elle ne soit pas définie pour $k > N$ ne change rien), d'équation caractéristique $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$ (attention à ne pas se laisser piéger par les indices $k+1$ et $k-1$ utilisés dans l'énoncé). Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 1 = 0$, et admet pour racine double $r_0 = 1$ (à un facteur $\frac{1}{2}$ près, c'est en fait une identité remarquable bien connue). Il existe donc deux réels A et B tels que $a_k = A + Bk$. Or, $a_0 = 1$, donc $A = 1$, et $a_N = 0$, donc

$0 = 1 + BN$, soit $B = -\frac{1}{N}$. Finalement, $a_k = 1 - \frac{k}{N}$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, N\}$.

Par exemple, pour $N = 4$, on obtient $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ et $a_4 = 0$, soit une suite arithmétique. La probabilité de en position 0 est alors directement proportionnelle à la distance initiale de la particule de la case 4. Le fait que la suite soit décroissante est logique, tout comme le fait qu'elle soit « symétrique » (a_1 et a_3 sont complémentaires par rapport à 1), puisque par exemple la probabilité de finir en position 0 en partant de la position 1 est la même que celle de finir en position 4 en partant de la position 3.

- (d) On a toujours une suite récurrente linéaire d'ordre 2, donc l'équation caractéristique est $px^2 - x + q = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2$, et il y a donc deux racines distinctes (puisque $p \neq \frac{1}{2}$) $r_1 = \frac{1+1-2p}{2p} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$ et $r_2 = \frac{1-1+2p}{2p} = 1$. Il existe donc deux constantes A et B telles que $a_k = A + B \left(\frac{q}{p}\right)^k$.

La condition $a_0 = 1$ impose $A + B = 1$, la condition $a_N = 0$ impose $A + B \times \frac{q^N}{p^N} = 0$. En

soustrayant les deux équations, $B \left(1 - \frac{q^N}{p^N}\right) = 1$, donc $B = \frac{p^N}{p^N - q^N}$, puis $A = 1 - B = -\frac{q^N}{p^N - q^N}$. Finalement, $a_k = \frac{-q^N + p^{N-k}q^k}{p^N - q^N} = \frac{q^k(p^{N-k} - q^{N-k})}{p^N - q^N}$.

- (e) Pas vraiment besoin de refaire les calculs, si on échange les valeurs de p et de q , la probabilité b_k sera la même que la probabilité a_{N-k} calculée à la question précédente (la situation est identique par symétrie du problème). Autrement dit, on calcule b_n en remplaçant p par q et k par $N - k$ dans le calcul précédent : $b_k = \frac{p^{N-k}(q^k - p^k)}{q^N - p^N}$.

- (f) Calculons : $a_k + b_k = \frac{q^k(p^{N-k} - q^{N-k})}{p^N - q^N} + \frac{p^{N-k}(q^k - p^k)}{q^N - p^N} = \frac{q^k p^{N-k} - q^N - p^{N-k} q^k + p^N}{p^N - q^N} = 1$. On en déduit que la probabilité que la particule continue à se déplacer sans jamais atteindre la position 0 ou la position N pour se stabiliser est nulle, quelle que soit sa position initiale.

Exercice 2

A. Étude d'un endomorphisme.

- Commençons par prouver que f est une application linéaire : si P_1 et P_2 sont deux polynômes de E , et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P_1 + P_2) = (2X + 1)(\lambda P_1 + P_2) - (X^2 - 1)(\lambda P_1 + P_2)' = \lambda(2X + 1)P_1 + (2X + 1)P_2 - \lambda(X^2 - 1)P_1' - (X^2 - 1)P_2' = \lambda f(P_1) + f(P_2)$ en exploitant la linéarité de la dérivation, ce qui prouve que f est linéaire. De plus, si $P = aX^2 + bX + c$, alors $f(P) = (2X + 1)(aX^2 + bX + c) - (X^2 - 1)(2aX + b) = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX + aX^2 + bX + c - 2aX^3 - bX^2 + 2aX + b = (a + b)X^2 + (2a + b + 2c)X + b + c \in E$, ce qui prouve que f est bien un endomorphisme.
- Le calcul général effectué à la question précédente permet d'obtenir les images suivantes pour les polynômes de la base canonique : $f(1) = 2X + 1$, $f(X) = X^2 + X + 1$ et $f(X^2) = X^2 + 2X$. On en déduit directement la matrice demandée (en faisant attention à bien respecter l'ordre des polynômes) : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Histoire de ne pas trop se fatiguer ici, on peut directement développer par rapport à la première ligne : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$. Puisque ce déterminant est non

nul, la matrice A est inversible, et l'application f est donc bijective (c'est un automorphisme de E).

4. L'équation proposée n'est autre que l'équation $f(P) = 0$ écrite légèrement différemment. Non seulement cette équation n'a qu'une seule solution d'après la bijectivité de f , mais on sait même que cette unique solution est le polynôme nul.

5. (a) On peut exploiter la matrice $A - I_3$ de l'endomorphisme g ou directement poser $P = aX^2 + bX + c$ pour obtenir que $P \in \ker(g)$ si (a, b, c) sont solutions du système

$$\begin{cases} a + b = a \\ 2a + b + 2c = b \\ b + c = c \end{cases} \text{ . Un système particulièrement difficile à résoudre ici : } b = 0$$

et $c = -a$, donc $\ker(g) = \text{Vect}(X^2 - 1)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace E . Le théorème du rang nous assure alors que $\dim(\text{Im}(g)) = 2$. Or, $g(1) = 2X$ et $g(X) = X^2 + 1$ ne sont pas proportionnels, ils suffisent donc à engendrer l'image, et $\text{Im}(g) = \text{Vect}(X, X^2 + 1)$ (tant qu'à faire, on peut se débarrasser de l'inutile facteur 2 dans l'image de 1).

- (b) Puisque les dimensions des deux espaces ont une somme égale à 3, il suffit de prouver que leur intersection est réduite au polynôme nul. Or, $X^2 - 1$, qui engendre $\ker(g)$, n'appartient pas à $\text{Im}(g)$ (c'est complètement évident vu la base qu'on vient d'en donner), donc $\ker(g) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ et $E = \ker(g) \oplus \text{Im}(g)$.

- (c) On calcule par exemple $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq A - I_3$. On a donc $g^2 \neq g$, et g n'est absolument pas un projecteur.

B. Diagonalisation de f par une méthode originale.

- Un réel λ est valeur propre de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur non nul $u \in E$ tel que $f(u) = \lambda u$. Ce vecteur est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ . Ici, un vecteur propre est donc un polynôme vérifiant $f(P) = \lambda P$, soit $(2X + 1)P - (X^2 - 1)P' = \lambda P$, ou encore $(2X + 1 - \lambda)P = (X^2 - 1)P'$, ce qui est bien l'équation différentielle (E_λ) .
- Il s'agit d'une équation linéaire homogène du premier ordre, qu'on peut linéariser sous la forme $y' - \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}y = 0$ (équation bien définie sur tout l'intervalle $]1, +\infty[$). Il reste donc à trouver une primitive de la fonction continue $x \mapsto \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1-\lambda}{x^2-1}$. Il faut effectuer une décomposition en éléments simples de la deuxième fraction, qu'on peut écrire sous la forme $\frac{1-\lambda}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$. Par la méthode classique (on multiplie puis on remplace), on trouve $a = \frac{\lambda-1}{2}$ et $b = \frac{1-\lambda}{2}$. Autrement dit, il faut intégrer la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1-\lambda}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$. Une primitive en est $x \mapsto \ln(x^2-1) + \frac{1-\lambda}{2}(\ln(x-1) - \ln(x+1))$, donc les solutions de (E_λ) sont les fonctions $y : x \mapsto K e^{\ln(x^2-1) + \frac{1-\lambda}{2}(\ln(x-1) - \ln(x+1))} = K(x^2 - 1) \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1-\lambda}{2}} = K(x+1)^{\frac{1+\lambda}{2}}(x-1)^{\frac{3-\lambda}{2}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
- Pour que λ soit valeur propre, il faut que les solutions obtenues à la question précédente soient des polynômes de degré au maximum 2. Pour cela, il faut déjà que les deux exposants $\frac{1+\lambda}{2}$ et $\frac{3-\lambda}{2}$ soient des entiers naturels (positifs donc), ce qui impose que λ soit un entier impair compris entre -1 (sinon le premier exposant est négatif) et 3 (sinon c'est le deuxième qui devient négatif). Il y a donc trois candidats, reste à vérifier que ça donne bien un degré correct

pour les polyômes : pour $\lambda = -1$, on trouve (au facteur K près) $(x+1)^0(x-1)^2 = (x-1)^2$, on valide. Pour $\lambda = 1$, on trouve $(x-1)^1(x+1)^1 = x^2 - 1$, on valide aussi, surtout que ça correspond à ce qu'on a obtenu dans la première partie (calcul du noyau de g). Enfin, pour $\lambda = 3$, on a $(x+1)^2(x-1)^0 = (x+1)^2$, on valide à nouveau.

4. En fait, on les connaît déjà si on a fait correctement les calculs de la question précédente. Vérifions quand même en revenant au calcul explicite de $f(P)$ effectué en début d'exercice : on a $f(P) = -P$ si $(a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + b+c = -aX^2 - bX - c$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} . \text{ Les deux équations extrêmes imposent } b = -2a = -2c, \text{ et}$$

donc $c = a$. En reportant dans la deuxième équation, $2a - 4a + 2a = 0$ est toujours vrai, donc $\ker(f + id) = \text{Vect}(X^2 - 2X + 1) = \text{Vect}((X-1)^2)$ comme prévu. De même, $f(P) = 3P$ si les

coefficients a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} -2a + b = 0 \\ 2a - 2b + 2c = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases}$. La résolution

est presque identique à la précédente : $b = 2a = 2c$ donc $c = a$, et la dernière équation est toujours vraie, donc $\ker(f - 3id) = \text{Vect}(X^2 + 2X + 1) = \text{Vect}((X+1)^2)$, là encore c'est normal.

5. On note donc $\mathcal{B} = (X^2 - 1, X^2 - 2X + 1, X^2 + 2X + 1)$. Puisqu'elle est constituée de trois polynômes dans un espace E de dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre pour prouver que c'est une base. Supposons $a(X^2 - 1) + b(X^2 - 2X + 1) + c(X^2 + 2X + 1) = 0$, cela donne le système $a + b + c = 2c - 2b = b + c - a = 0$. La deuxième équation donne $c = b$, en remplaçant on trouve $a + 2b = -a + 2b = 0$, ce qui induit $b = a = c = 0$. La famille est bien libre, c'est une base de E .

6. Avec notre choix de base $\mathcal{B}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On va inverser la matrice en résolvant

le système $\begin{cases} -a + b + c = x \\ -2b + 2c = y \\ a + b + c = z \end{cases}$. La différence des équations extrêmes donne $a =$

$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$, l'opération $2L_3 + L_2$ permet alors de trouver $2a + 4c = 2z + y$, donc $c = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$, et enfin $b = z - a - c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$. La matrice Q est donc

inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Les trois vecteurs étant des vecteurs propres, on a simplement $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On sait

par ailleurs que $D = Q^{-1}AQ$.

8. Récurrence classique pour la première partie : pour $n = 0$, $QD^0Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3 = A^0$. De plus, $A = QDQ^{-1}$, donc en supposant la formule vraie au rang n , alors $A^{n+1} = A \times A^n =$

$$QDQ^{-1}QD^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}. \text{ Il ne reste plus qu'à calculer : } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

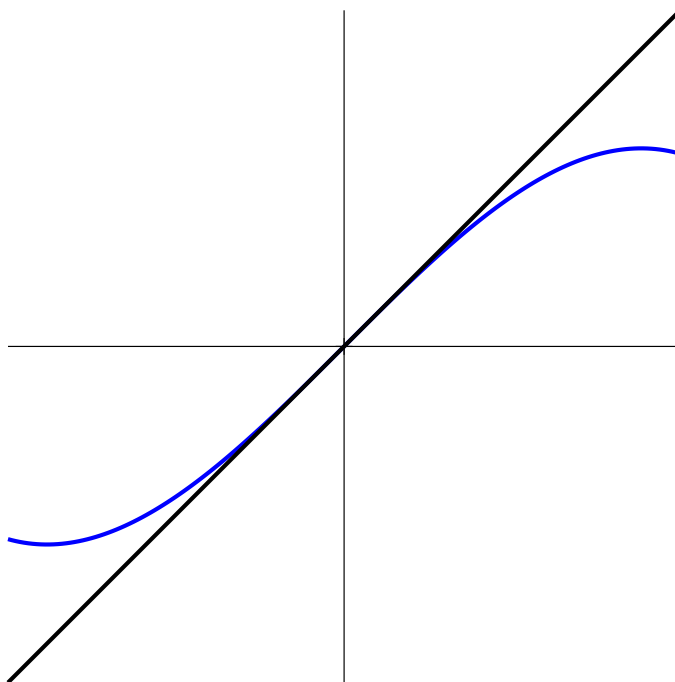
puis $QD^n = \begin{pmatrix} -1 & (-1)^n & 3^n \\ 0 & 2(-1)^{n+1} & 2 \times 3^n \\ 1 & (-1)^n & 3^n \end{pmatrix}$ et enfin

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n + 2 & 3^n + (-1)^{n+1} & 3^n + (-1)^n - 2 \\ 2 \cdot 3^n + 2(-1)^{n+1} & 2 \cdot 3^n + 2(-1)^n & 2 \cdot 3^n + 2(-1)^{n+1} \\ 3^n + (-1)^n - 2 & 3^n + (-1)^{n+1} & 3^n + (-1)^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

I. Généralités.

1. L'équation $y' + 2xy = 0$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Tentons donc la variation de la constante en posant $y(x) = K(x)e^{-x^2}$. On calcule $y'(x) = K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2}$, et la fonction y est solution particulière de (E) si $K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2} + 2xK(x)e^{-x^2} = 1$, donc si $K'(x) = e^{x^2}$. Le gros problème, c'est qu'on ne connaît pas de primitive simple de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$, et pour cause, puisqu'il n'en existe aucune exprimable à l'aide des fonctions usuelles !
2. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$, qui est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et elle est donc $\mathcal{C}^\infty$. Son produit par une exponentielle qui est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ restera de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, g est de la forme $K(x)e^{-x^2}$, avec K une primitive de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$. Le calcul de variation de la constante de la question précédente montre que g est solution de (E).
3. Posons $h(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Par parité de l'exponentielle intégrée, $\int_{-x}^0 e^{t^2} dt = \int_0^x e^{t^2} dt$, ce qui prouve que $-h(-x) = h(x)$ (attention au mauvais sens des bornes côté négatif), et donc que h est impair. Son produit par une exponentielle paire donne donc une fonction g impaire.
4. On applique simplement le théorème classique du cours : les solutions sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto g(x) + Ke^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
5. On calcule facilement $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$. Puisque h est une primitive de cette fonction et qu'elle s'annule en 0, on peut intégrer le développement limité précédent : $h(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ (même pas besoin du troisième terme finalement). Comme par ailleurs $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$, on effectue le produit pour obtenir $g(x) = \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4\right) \left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + o(x^4) = x + \frac{1}{3}x^3 - x^3 + o(x^3) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. La fonction g admet une tangente en 0 d'équation $y = x$, et puisque $g(x) - x \sim -\frac{2}{3}x^3$, la courbe de g sera localement au-dessus de cette tangente à gauche de 0 et en-dessous à droite de 0. Une allure locale possible :



6. Si la fonction h est constamment nulle, elle admet un maximum égal à 0 atteint partout. Oublions donc ce cas et supposons que h prenne au moins une valeur strictement positive : $h(a) = \alpha > 0$. Puisque h tend vers 0 en $+\infty$, en revenant à la définition de la limite, il existe un réel $b \geq a$ tel que $-\frac{\alpha}{2} \leq f(x) \leq \frac{\alpha}{2}$ sur l'intervalle $[b, +\infty[$. De plus, h étant continue sur le segment $[0, b]$, elle y admet un maximum (théorème du maximum) nécessairement supérieur ou égal à α puisque $a \in [0, b]$ et $h(a) = \alpha$. Ce maximum est donc un maximum pour h sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$, ce qui prouve le résultat demandé.

II. Développement limité des solutions de (E).

1. Une fonction solution de l'équation (E) est nécessairement au moins dérivable. Prouvons par récurrence qu'elle est en fait de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ pour tout entier n . C'est le cas pour $n = 0$ comme on vient de le signaler. Supposons désormais f dérivable $n + 1$ fois, et constatons que l'équation (E) peut se mettre sous la forme $y' = 1 - 2xy$. Avec l'hypothèse que f est de classe $\mathcal{D}^{n+1}$, le membre de droite de cette équation est $\mathcal{D}^{n+1}$, ce qui prouve que f' est $\mathcal{D}^{n+1}$ et donc que f est en fait $\mathcal{D}^{n+2}$. La fonction f est donc dérivable « à l'infini » et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. On remplace brillamment x par 0 dans l'équation : $f'(0) = 1$.
3. Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ admet des développements limités à tout ordre donnés par la formule de Taylor, donc $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
4. En dérivant $n + 1$ fois l'équation (E) (ce qu'on a le droit de faire puisque tout est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et en appliquant la formule de Leibniz pour dériver le produit xy (la formule ne contiendra que deux termes puisque toutes les dérivées du facteur x à partir de la deuxième sont nulles), on obtient directement $y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} + 2\binom{n+1}{1}y^{(n)} = 0$, c'est-à-dire exactement la relation demandée. En remplaçant x par 0 dans cette équation, et en exploitant la formule rappelée pour a_k à la question précédente, on a $(n + 2)!a_{n+2} + 2(n + 1) \times n!a_n = 0$, soit en factorisant le tout par $(n + 1)!$, la relation $(n + 2)a_{n+2} + 2a_n = 0$.
5. On va effectuer une récurrence. Au rang $p = 0$, la formule affirme que $a_1 = \frac{(-1)^0 4^0 0!}{1!} = 1$. Or, on sait que $a_1 = f'(0) = 1$, donc la formule est vérifiée. Supposons-là désormais au rang

p , et exploitons le fait que $(2p+3)a_{2p+3} = -2a_{2p+1}$ (relation de la question précédente pour $n = 2p+1$) pour en déduire $a_{2p+3} = -\frac{2}{2p+3} \times \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} = \frac{(-1)^{p+1} 2 \times 4^p (2p+2)}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} = \frac{(-1)^{p+1} 4^{p+1} (p+1)!}{(2p+3)!}$, soit la formule souhaitée au rang suivant, ce qui achève notre récurrence.

6. Si $f(0) = 1$, on a donc $a_0 = 1$, puis $a_2 = \frac{-1 \times 4 \times 1}{2!} = -2$, et $a_1 = 1$ puis $a_3 = \frac{-4}{3!} = -\frac{2}{3}$. Autrement dit, $f(x) = 1 + x - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. En particulier, la solution f admet alors une tangente en 0 d'équation $y = 1 + x$, et comme $f(x) - (1 + x) \sim -2x^2 < 0$, la courbe sera en-dessous de cette tangente au voisinage de 0.

III. Étude de la fonction g .

- La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ étant croissante sur l'intervalle $[0, x]$ (composée de fonctions croissantes), on peut écrire l'encadrement $e^{0^2} = 1 \leq e^{t^2} \leq e^{x^2}$, valable sur tout l'intervalle. Il suffit alors d'intégrer cet encadrement entre 0 et x pour en déduire que $x \leq \int_0^x e^{t^2} dt \leq xe^{x^2}$. Un simple produit par la quantité positive e^{-x^2} donne alors l'encadrement demandé par l'énoncé.
- Une inspiration soudaine m'incite à faire une IPP en posant $u(t) = \frac{1}{t}$, et donc $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$, et $v'(t) = te^{t^2}$ qui a le bon goût d'être la dérivée de $v(t) = \frac{1}{2}e^{t^2}$. Toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ne contenant pas 0, donc $\int_1^x e^{t^2} dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$.
- On refait une IPP sur l'intégrale de droite, en posant cette fois-ci $u(t) = \frac{1}{t^3}$ et donc $u'(t) = -\frac{3}{t^4}$, et toujours $v'(t) = te^{t^2}$ et $v(t) = \frac{1}{2}e^{t^2}$. On obtient cette fois-ci $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t^3} \right]_1^x + \int_1^x \frac{3e^{t^2}}{2t^4} dt = \frac{e^{x^2}}{2x^3} - \frac{e}{2} + \frac{3}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$. Il n'y a plus qu'à multiplier par $\frac{1}{2}$ et réintroduire tout ça dans la relation précédente pour obtenir la formule de l'énoncé.
- (a) La fonction h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $h'(t) = \frac{2t^3 e^{t^2} - 2te^{t^2}}{t^4} = \frac{2te^{t^2}(t^2 - 1)}{t^4}$, quantité positive sur l'intervalle considéré. La fonction h est donc croissante.
 (b) On écrit simplement $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt = \int_1^x h(t) \times \frac{1}{t^2} dt \leq \int_1^x h(x) \times \frac{1}{t^2} dt$. Comme $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \sim h(x)$. Or, $h(x) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{x^2}}{x} = o\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)$, ce qui donne le résultat souhaité.
 (c) Dans l'expression obtenue à la question 3, tous les termes sont négligeables par rapport au premier y compris le terme constant, bien sûr, puisque la croissance comparée assure que le premier terme a une limite infinie en $+\infty$). On a donc $\int_1^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$, et un simple produit permet de conclure : $g(x) \sim \frac{1}{2x}$.
- C'est une application directe du résultat technique prouvé en fin de première partie : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ d'après l'équivalent obtenu à la question précédente, $g(0) = 0$ et g est continue et positive sur $[0, +\infty[$, donc elle admet un maximum (non nul bien entendu, puisque g n'est pas la

fonction nulle). Comme on sait par ailleurs que g est solution de l'équation (E) , tout point en lequel est atteint un maximum vérifie $g'(b) + 2bg(b) = 1$, donc $g(b) = \frac{1}{2b}$ puisque $g'(b) = 0$ (c'est un maximum !). Ceci prouve au passage que le maximum est unique (s'il était atteint à deux endroits différents, les images seraient différentes d'après le calcul qu'on vient de faire).

6. On n'oublie pas que la fonction est impaire et qu'on a étudié localement g au voisinage de 0 dans la première partie. On peut de plus faire figurer la courbe d'équation $y = \frac{1}{2x}$ (en pointillés verts sur mon schéma) qui sera asymptote à la courbe de g en $\pm\infty$ et sur laquelle se situe le maximum :

