Demi-Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 mars 2024

Exercice 1

1. Pour F, c'est un sous-espace vectoriel par définition. La famille $((1,1,0,2),(1,1,1,1))$ en est une famille génératrice, et ses deux vecteurs n'étant pas proportionnels, elle est également libre, donc forme une base de F. En particulier, $\dim(F) = 2$. Pour obtenir une famille génératrice de G (et prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel), on résout le système, ce qui est ici immédiat : $x = y + z$ et $t = y - z$, donc $G = \{(y+z, y, z, y-z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,1,0,1),(1,0,1,-1))$. La famille obtenue est libre (vecteurs non proportionnels) et forme donc une base de G, qui est de dimension 2.
2. On sait déjà que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Intéressons-nous donc à l'intersection des deux sous-espaces : si $u(x,y,z,t) \in F \cap G$, alors $u = a(1,1,0,2) + b(1,1,1,1) = (a+b, a+b, b, 2a+b)$, et $u = c(1,1,0,1) + d(1,0,1,-1) = (c+d, c, d, c-d)$. L'égalité des formules pour les deux coordonnées centrales impose $c = a+b$ et $d = b$. On remplace alors dans les deux autres équations : $a+b = a+2b$ et $2a+b = a$, ce qui implique facilement $b = 0$ (première équation) puis $a = 0$, donc $u = 0$. On a donc prouvé que $F \cap G = \{0\}$. Avec la condition sur les dimensions, cela suffit à démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
3. Supposons qu'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs s'annule : $a(1,0,1,-1)+b(1,1,0,1)+c(0,-1,1,-2) = 0$. On résout le système correspondant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & 0 \\ & & b & - & c & = & 0 \\ a & & & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & - & 2c & = & 0 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $b = c$, la troisième $a = -c$. La première équation $a + b = 0$ est alors automatiquement vérifiée, et la dernière devient $c + c - 2c = 0$ qui est également vraie. Le système n'est donc pas un système de Cramer. Par exemple, $a = -1$, $b = 1$ et $c = 1$ en est une solution non triviale, et la famille n'est donc pas libre. ON peut par exemple écrire $(0,-1,1,-2) = (1,0,1,-1) - (1,1,0,1)$.
4. Puisque notre troisième vecteur est combinaison linéaire des deux premiers de la famille, $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}((1,0,1,-1),(1,1,0,1)) = G$.
5. En reprenant les notations utilisées dans la deuxièmes question, on peut écrire $u_F = (a+b, a+b, b, 2a+b)$ et $u_G = (c+d, c, d, c-d)$, ce qui nous donne à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ a & + & b & + & c & & & = & 2 \\ & & b & & & + & d & = & 3 \\ 2a & + & b & + & c & - & d & = & 4 \end{array}\right.$. La différence des deux premières équations impose $d = -1$, puis la troisième équation donne $b = 3 - d = 4$. Il reste alors les deux équations $a + c = -2$ et $2a + c = -1$. On soustrait pour obtenir $a = 1$, puis on en déduit $c = -3$. Notre système a donc comme prévu une solution unique $(1,4,-3,-1)$, et on calcule ensuite aisément $u_F = (5,5,4,6)$ et $u_G = (-4,-3,-1,-2)$.

Exercice 2

1. Un calcul rapide donne $A^2 = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. Les coefficients en-dehors de la diagonale ont donc été multipliés par 3 lors du passage de A à A^2, et on en déduit rapidement que $A^2 = 3A + 10I_2$.
2. C'est une récurrence déjà faite des dizaines de fois : pour $n = 0$, on peut choisir $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ pour obtenir $A^0 = I_2$ (inutile de vérifier pour $n = 1$ puisqu'on ne nous demande pas le calcul des coefficients ensuite), et si on suppose la formule vraie au rang n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_nA + b_nI_2) = a_nA^2 + b_nA = a_n(3A + 10I_2) + b_nA = (3a_n + b_n)A + 10a_nI_2$, ce qui prouve l'hérédité en posant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 10a_n$.
3. On pose brutalement $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, et on calcule $AM = \begin{pmatrix} 4x + 2z & 4y + 2t \\ 3x - z & 3y - t \end{pmatrix}$, et $MA = \begin{pmatrix} 4x + 3y & 2x - y \\ 4z + 3t & 2z - t \end{pmatrix}$. On en déduit le système suivant (on a tout passé à gauche dans chaque équation) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 3y & - & 2z & & & = & 0 \\ 2x & - & 5y & & & - & 2t & = & 0 \\ -3x & & & + & 5z & + & 3t & = & 0 \\ & & -3y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes sont manifestement équivalentes : $z = \dfrac{3}{2}y$. Si on remplace dans la troisième équation, on trouve alors $-3x + \dfrac{15}{2}z + 3t = 0$, ce qui est la même équation que la deuxième à un facteur $-\dfrac{3}{2}$ près. On peut donc simplement exprimer une deuxième inconnue en fonction des autres, par exemple $t = x - \dfrac{5}{2}y$. Les matrices solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x - \frac{5}{2}y \end{pmatrix}$, soit $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices de la famille obtenues ne sont pas proportionnelles, donc forment une base de F, et $\dim(F) = 2$.
4. La famille proposée n'est sûrement pas libre puisqu'on sait déjà que $A^2 = 3A + 10I_2$. D'ailleurs, A^3 aussi est combinaison linéaire de A et de I_2 (question 2), donc $\text{Vect}(I_2, A, A^2, A^3) = \text{Vect}(I_2, A)$. Les deux matrices restantes n'étant pas proportionnelles, elles forment une base de notre espace, qui est donc de dimension 2.
5. (a) Bien entendu, $I_2 \in G$ et $A \in G$, donc $\text{Vect}(I_2, A) \subset G$. Mais d'après la question 2, toutes les puissances de A sont combinaisons linéaires de I_2 et de A, donc appartiennent à $\text{Vect}(I_2, A)$. C'est donc aussi le cas de toute matrice de la forme $P(A)$ qui est une simple combinaison linéaire des précédentes, ce qui prouve l'inclusion réciproque $G \subset \text{Vect}(I_2, A)$, et donc l'égalité entre ces deux espaces.
   (b) Une combinaison linéaire de I_2 et de A commute nécessairement avec A, donc $G \subset F$. Comme ces deux espaces sont de dimension 2, ils sont donc nécessairement égaux.
6. Si on reprend la forme obtenue pour les matrices de l'ensemble F, elles appartiennent également à H si et seulement si $x + x - \dfrac{5}{2}y = 0$, soit $x = \dfrac{5}{4}y$. Autrement dit, $F \cap H = \left\{\begin{pmatrix} \frac{5}{4}y & y \\ \frac{3}{2}y & -\frac{5}{4}y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ (on a tout multiplié par 4 pour éviter les fractions).
7. Le calcul précédent montre que $\dim(F \cap H) = 1$. Or, $\dim(F) = 2$, et $\dim(H) = 3$ (si on n'en est pas convaincu, on écrit une base de H facilement), donc la formule de Grassmann donne $\dim(F + H) = 2 + 3 - 1 = 4$, ce qui prouve que $F + H = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. La fonction g est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 3x^2 - 2x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$. Ce trinome a pour racines évidentes -1 et 2 (oui on peut calculer un discriminant si on y tient vraiment). On obtient donc le tableau de variations suivant pour la fonction g, auquel on colle celui de f qui sera le même puisque la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (la seule subtilité étant que f ne sera pas dérivable sur $\mathbb{R}$, on reviendra dessus au moment de tracer la courbe). Précisons en passant les valeurs intéressantes : $g(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 - \frac{7}{2} = 0$ (donc $f(-1) = 0$ également), et $g(2) = 8 - 6 - 12 - \frac{7}{2} = -\frac{27}{2}$, donc $f(2) = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Le calcul des limites ne pose aucun problème.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

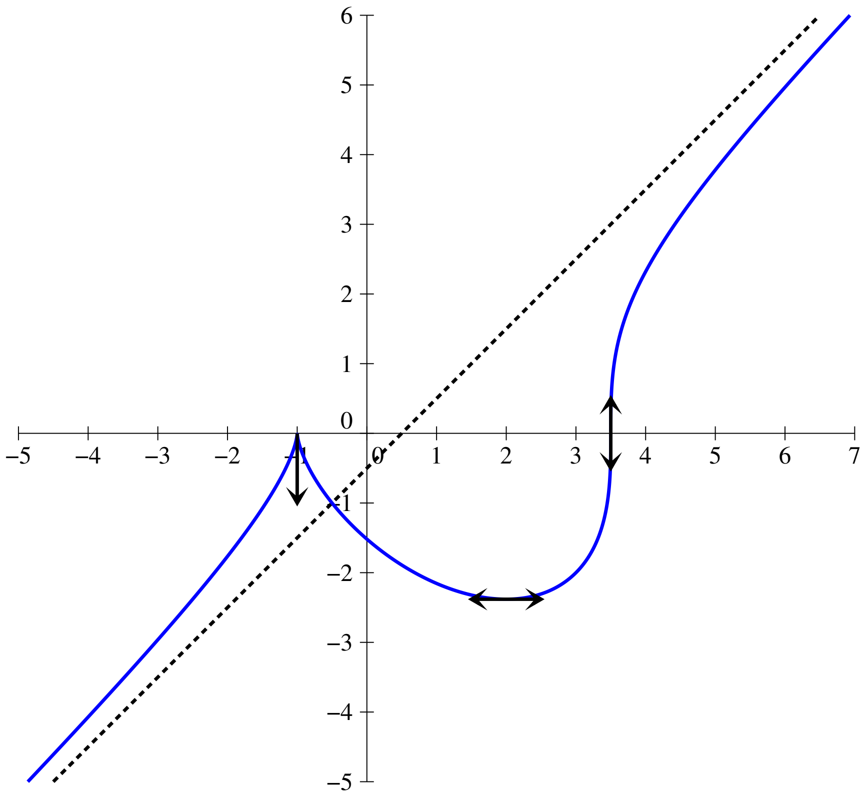
2. Comme on l'a déjà signalé dans le tableau de variations, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$, et on a le droit de composer des équivalents par des puissances, donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

3. C'est du cours : $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) u^2 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \left(\frac{1}{3} - 2\right) u^3 + o(u^3) = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + \frac{5}{81}u^3 + o(u^3)$.

4. On commence par écrire $f(x) = \sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} - \frac{7}{2x^3}\right)} = x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} - \frac{7}{2x^3}}$. On peut effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ (avec X qui aura une limite nulle quand x tend vers $+\infty$) puis appliquer le développement limité rappelé à la question précédente, mais en se contentant de l'ordre 2 : $f(x) = \frac{1}{X}\left(1 - \frac{3}{2}X - 6X^2 + o(X^2)\right)^{\frac{1}{3}}$
$= \frac{1}{X}\left(1 - \frac{1}{2}X - 2X^2 - \frac{1}{4}X^2 + o(X^2)\right) = \frac{1}{X} - \frac{1}{2} - \frac{9}{4}X + o(X)$. Autrement dit, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{2} - \frac{9}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En particulier, $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{9}{4x}$, ce qui permet d'une part d'affirmer que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (puisque l'équivalent a une limite nulle), et d'autre part que la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (équivalent négatif).

5. Tout le calcul effectué ci-dessus (y compris la factorisation du $\sqrt[3]{x^3}$ sous la forme x) reste valable en $-\infty$. La même droite reste donc asymptote oblique de l'autre côté, mais cette fois-ci la courbe sera localement au-dessus de son asymptote puisque $-\frac{9}{4x}$ est positif au voisinage de $-\infty$.

6. Avec la valeur donnée par l'énoncé, le minimum de f est environ égal à $-\frac{12}{5} = -2.4$. Les calculs effectués aux deux questions précédentes permettent évidemment de faire figurer l'asymptote sur notre graphique, mais il y a un détail à ne pas oublier si on veut une courbe correcte : la fonction racine cubique n'est pas dérivable en 0 (comme la racine carrée), ce qui fait que f ne sera notamment pas dérivable en -1 (il n'y a donc absolument pas de tangente horizontale au maximum local atteint en cette valeur, mais bel et bien une tangente verticale !). Au vu des variations de g, il y a une autre valeur d'annulation où la courbe de f admettra une tangente verticale. On peut la calculer en factorisant g par $(x+1)$, et même par $(x+1)^2$ puisque -1 est à la fois racine de g et de g' d'après les calculs effectués à la première question. Comme le produit des trois racines de g (en comptant deux fois la racine double -1) doit être égal à $\frac{7}{2}$ (relations coefficients-racines), on déduit sans réel calcul que $g(x) = (x+1)^2\left(x - \frac{7}{2}\right)$, et donc que $f\left(\frac{7}{2}\right) = 0$, avec une tangente verticale à la courbe en ce point. La courbe de f donne donc l'allure assez spéciale qui suit :



7. L'équation ne peut avoir de solution sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ où la fonction g est négative. Ensuite, g est continue et monotone sur $[2, +\infty[$, donc bijective de cet intervalle vers $\left]-\frac{27}{2}, +\infty\right[$, ce qui assure qu'elle y prend exactement une fois chaque valeur entière non nulle.

8. En notant h la réciproque de g (restreinte à l'intervalle donné dans la question précédente), on aura donc $u_n = h(n)$. Or, h a les mêmes variations que g, et vérifie en particulier $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. On en déduit que $\lim u_n = +\infty$. On peut alors affirmer que $g(u_n) = u_n^3 - \frac{3}{2}u_n^2 - 6u_n - \frac{7}{2} \sim u_n^3$. Comme par ailleurs $g(u_n) = n$, on a donc $u_n^3 \sim n$, puis $u_n \sim n^{\frac{1}{3}}$.

9. On sait que $u_n^3 - \frac{3}{2}u_n^2 - 6u_n - \frac{7}{2} = n$, donc $u_n^3\left(1 - \frac{3}{2u_n} - \frac{6}{u_n^2} - \frac{7}{2u_n^3}\right) = n$, ou encore

$\dfrac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}} = \left(1 - \dfrac{3}{2u_n} - \dfrac{6}{u_n^2} - \dfrac{7}{2u_n^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$. Avec l'équivalent déjà obtenu à la question précédente, on peut écrire le membre de droite de cette égalité sous la forme $\left(1 - \dfrac{3}{2}n^{-\frac{1}{3}} + o(n^{-\frac{1}{3}})\right)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{2}n^{-\frac{1}{3}} + o(n^{-\frac{1}{3}})$ (même si on avait gardé les termes suivants à l'étape précédente, on n'aurait pas eu de quoi pousser le développement limité plus loin, il faudrait refaire les calculs pour obtenir quelque chose de plus précis). On peut donc conclure : $u_n = n^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.