Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7

MPSI Lycée Camille Jullian

9 mars 2024

Exercice 1

Les deux questions de ce premier exercice sont complètement indépendantes.

1. Factoriser complètement dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ en exploitant le fait que i est racine de P.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\ln(1+2x)$ est convexe sur son intervalle de définition. En déduire que, si x et y sont deux réels supérieurs ou égaux à $-\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{(1+2x)(1+2y)} \leqslant 1 + x + y$.

Exercice 2

Une variante étrange du jeu d'échecs consiste à placer dans les cases d'un échiquier ne contenant que quatre lignes et quatre colonnes des pièces de trois types : des pions (P), des cavaliers (C) et des tours (T). Une case de l'échiquier ne peut pas contenir deux pièces simultanément (mais elle peut être vide). La figure ci-dessous indique une position possible avec trois pions, deux cavaliers et une tour (oui, je sais, de vrais symboles de pièces d'échecs auraient été plus jolis, mais j'ai échoué à importer un package LaTeX qui fasse ça bien) :

P			C
			P
C	P		
			T

1. On suppose pour l'instant qu'un seul joueur joue à ce jeu, et qu'il dispose d'autant de pions, cavaliers et tours de couleur blanche qu'il le souhaite. Il n'y a a priori aucune contrainte sur la position des pièces sur l'échiquier. Les applications numériques ne sont absolument pas demandées. Par contre, les formules proposées devront être justifiées.
   (a) Combien de positions différentes peut-on créer au total ?

(b) Combien de positions si on n'utilise que des pions, et donc ni tours, ni cavaliers ?
(c) Combien de positions avec au moins un cavalier sur l'échiquier ?
(d) Combien de positions avec exactement quatre pions, quatre tours, et quatre cavaliers ?
(e) Combien de positions avec la moitié (exactement) des cases occupées par une pièce ?
(f) Combien de positions avec exactement une pièce de chaque type sur chaque ligne de l'échiquier ?
(g) Combien de positions avec le même nombre de pions, de tours et de cavaliers (ce nombre n'étant pas imposé) ?

2. On suppose désormais que deux joueurs ayant des pièces de couleurs différentes (l'un a des pièces blanches, l'autre des noires) posent chacun à tour de rôle une pièce sur l'échiquier. Une partie consiste en une suite de coups où un des joueurs pose une pièce sur l'échiquier (aucun déplacement ultérieur des pièces).
(a) Combien y a-t-il de parties possibles si on considère que les joueurs ne posent que des pions (aucune tour, aucun cavalier) jusqu'à remplir entièrement l'échiquier ?
(b) Combien y a-t-il de positions finales différentes possibles avec les mêmes hypothèses qu'à la question précédente ?
(c) Combien y a-t-il de parties possibles si les joueurs posent une pièce de leur choix à chaque tour (pion, cavalier ou tour), en supposant toujours qu'on remplit complètement l'échiquier ?

Exercice 3

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **mid-convexe** si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

1. Montrer qu'une fonction convexe est forcément mid-convexe.
2. Soit $z \in \mathbb{R}$, montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\lfloor 2^n z \rfloor}{2^n}$ converge vers z.
3. On suppose dans cette question que f est une fonction **continue** et mid-convexe. On note alors P_n la propriété : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \{0,1,\dots,2^n\}$, $f\left(\dfrac{k}{2^n}x + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \dfrac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)f(y)$.
On veut prouver par récurrence la propriété P_n.
(a) Montrer que la propriété P_1 est vraie.
(b) En supposant P_n vraie, montrer que, si $k \in \{0,\dots,2^{n+1}\}$, alors $f\left(\dfrac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \dfrac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{k}{2^n}x + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)y\right) + f(y)\right]$.
(c) En déduire la propriété P_{n+1}.
4. Montrer à l'aide des deux questions précédentes que toute fonction continue et mid-convexe est en fait convexe.
5. Donner un exemple de fonction mid-convexe mais pas continue qui n'est pas convexe (un dessin correctement expliqué suffira).

Problème

Les deux parties du problème sont complètement indépendantes, elle ont uniquement en commun de faire intervenir des objets étudiés par un même mathématicien.

A. Étude des polynômes d'Hermite.

Cette première partie de problème est consacré à l'étude des polynômes d'Hermite[1]. Ces polynômes sont définis de la façon suivante : $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

1. Préciser l'expression des polynômes H_i, pour $i \in \{1,2,3,4\}$.
2. Montrer que H_n est toujours un polynôme unitaire de degré n.

1. ainsi nommés en hommage au mathématicien français du 19ème siècle Charles Hermite (pas net)

3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.
4. En notant a, b, c et d les quatre racines du polynôme H_4, calculer $a^2+b^2+c^2+d^2$, puis $\frac{ab}{cd}+\frac{ac}{bd}+\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+\frac{bd}{ac}+\frac{cd}{ab}$. On effectuera ces calculs sans chercher à déterminer les valeurs de a, b, c et d.
5. On souhaite démontrer que les quatre polynômes H_0, H_1, H_2 et H_3 forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Comme vous ne savez bien entendu pas encore ce que signifient ces termes, le raisonnement sera ici complètement guidé.
   (a) Rappeler la définition de l'ensemble $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Montrer que, si quatre réels a_0, a_1, a_2 et a_3 sont tels que $\sum_{i=0}^{3} a_i H_i = 0$, alors nécessairement $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
   (c) Montrer qu'on peut écrire chacun des quatre polynômes 1, X, X^2 et X^3 comme combinaison linéaire des quatre polynômes H_0, H_1, H_2 et H_3 (autrement dit sous la forme $a_0H_0 + a_1H_1 + a_2H_2 + a_3H_3$).
   (d) En déduire que, $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\exists!(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$, $P = \sum_{i=0}^{3} a_i H_i$.
   (e) Montrer que, avec les notations de la question précédente, $a_i = \frac{b_i}{i!}$, où b_i est le coefficient apparaissant devant le polynôme H_0 dans la décomposition du polynôme $P^{(i)}$.
   (f) Appliquer les résultats qu'on vient d'obtenir pour décomposer $P = X^3 + X^2 + X + 1$ comme combinaison linéaire de H_0, H_1, H_2 et H_3.

B. Interpolation d'Hermite.

On considère désormais une famille de réels distincts (x_i), avec $i \in \{1, \dots, n\}$, ainsi que **deux** autres familles de réels (pas nécessairement distincts) (a_i) et (b_i) (mêmes indices que pour la première famille). Le but de cette partie est d'étudier l'existence de polynômes P vérifiant $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$, et de déterminer le plus petit degré d'un polynôme solution d'un tel problème. On suppose les trois familles fixées et on note H l'ensemble des polynômes solutions du problème.

1. Dans le cas particulier où $n = 1$, montrer qu'il existe toujours un unique polynôme de degré 1 solution du problème.
2. Dans le cas général, on pose $Q_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)^2$.
   (a) Calculer les valeurs de $Q_i(x_k)$, pour tous les entiers $k \in \{1, \dots, n\}$.
   (b) Calculer les valeurs de $Q'_i(x_k)$, pour tous les entiers $k \in \{1, \dots, n\}$.
   (c) Montrer que le polynôme $P_0 = \sum_{i=1}^{n} [(1 - Q'_i(x_i)(X - x_i))a_i + (X - x_i)b_i]Q_i$ appartient à H.
3. Montrer que, si P_1 et P_2 sont deux polynômes de H, alors $P_2 - P_1$ est un multiple du polynôme $T = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$.
4. Montrer que P_0 est le polynôme de plus petit degré de H, et qu'il est l'unique polynôme dans $H \cap \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
5. Déterminer le polynôme P_0 dans le cas où $n = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = -1$ et $b_2 = -2$.