Devoir Surveillé n^o 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 février 2024

Exercice 1

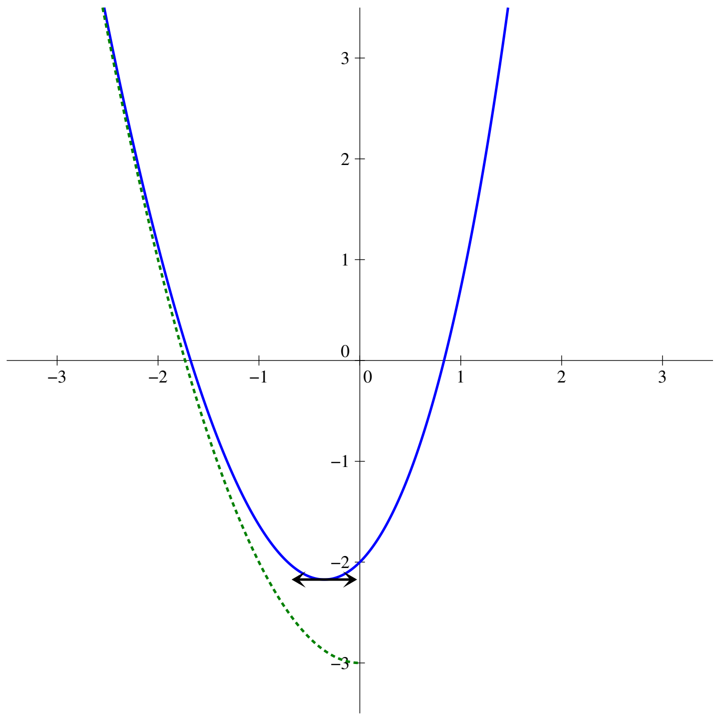
1. Les matrices A et I_3 étant toutes les deux triangulaires inférieures, on peut se contenter de chercher P et Q sous la même forme, ce qui va (un peu) limiter le nombre de variables et d'inconnues à écrire. Posons donc $P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix}$ (vivent les lettres grecques). En regardant indépendamment chacun des six coefficients correspondants dans les deux égalités imposées, on obtient six systèmes de deux équations à deux inconnues qui se résovent facilement. Commençons en haut à gauche : $a + \alpha = 1$ et $4a + 9\alpha = 4$ donne $a = 1$ et $\alpha = 0$ (je ne détaille pas tous les systèmes sinon ça va prendre des pages). Le système est le même en bas à droite, on aura donc $f = 1$ et $\zeta = 0$. Achevons la diagonale avec le coefficient central : $c + \gamma = 1$ et $4c + 9\gamma = 9$ est vérifié pour $c = 0$ et $\gamma = 1$. Passons aux deux derniers coefficients de la première colonne, qui vérifient les mêmes systèmes : $b + \beta = 0$ et $4b + 9\beta = -5$ implique $b = 1$ et $\beta = -1$, donc on a aussi $d = 1$ et $\delta = -1$. Enfin, on obtient les valeurs opposées pour le dernier système : $e = -1$ et $\varepsilon = 1$. Bref, on peut enfin conclure : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Détaillons au moins un calcul pour faire croire au correcteur qu'on a tout vérifié intégralement : $PQ = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+1-1 & 0-1+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = 0$. On obtient de même $QP = 0$, et sans plus de difficulté $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$.
3. On va bien sûr procéder par récurrence, en exploitant les calculs de la question précédente pour simplifier le développement dans l'hérédité : pour $k = 0$, $4^0 P + 9^0 Q = P + Q = I_3$. Au rang 1 (utile pour l'hérédité), $4P + 9Q = A$ par construction. Supposons la formule vraie au rang k, alors $A^{k+1} = A \times A^k = (4P + 9Q)(4^k P + 9^k Q) = 4^{k+1} P^2 + 4 \times 9^k PQ + 9 \times 4^k QP + 9^{k+1} Q^2 = 4^{k+1} P + 9^{k+1} Q$, ce qui prouve l'hérédité.
4. Résolvons un système, il sera directement triangulaire, ça va aller vite : $\begin{cases} 4x & & & = a \\ -5x + 9y & & & = b \\ -5x + 5y + 4z & & & = c \end{cases}$. On obtient directement $x = \dfrac{1}{4}a$, puis $9y = b + 5x = \dfrac{5}{4}a + b$, donc $y = \dfrac{5}{36}a + \dfrac{1}{9}b$, et enfin $4z = c + 5x - 5y = c + \dfrac{5}{4}a - \dfrac{25}{36}a - \dfrac{5}{9}b = \dfrac{5}{9}a - \dfrac{5}{9}b + c$, donc $z = \dfrac{5}{36}a - \dfrac{5}{36}b + \dfrac{1}{4}c$. La matrice A est donc inversible (on le savait depuis le départ puisqu'elle ne contenait pas de 0 sur la diagonale), et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{36} & -\frac{5}{36} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. La formule prétend que cette inverse devrait être égale à $\dfrac{1}{4}P + \dfrac{1}{9}Q$. C'est bien le cas : c'est clair pour les

coefficients de la diagonale (et encore plus ceux au-dessus de la diagonale), et pour les autres on a $\frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$, ce qui donne les valeurs souhaitées pour les trois coefficients restants.

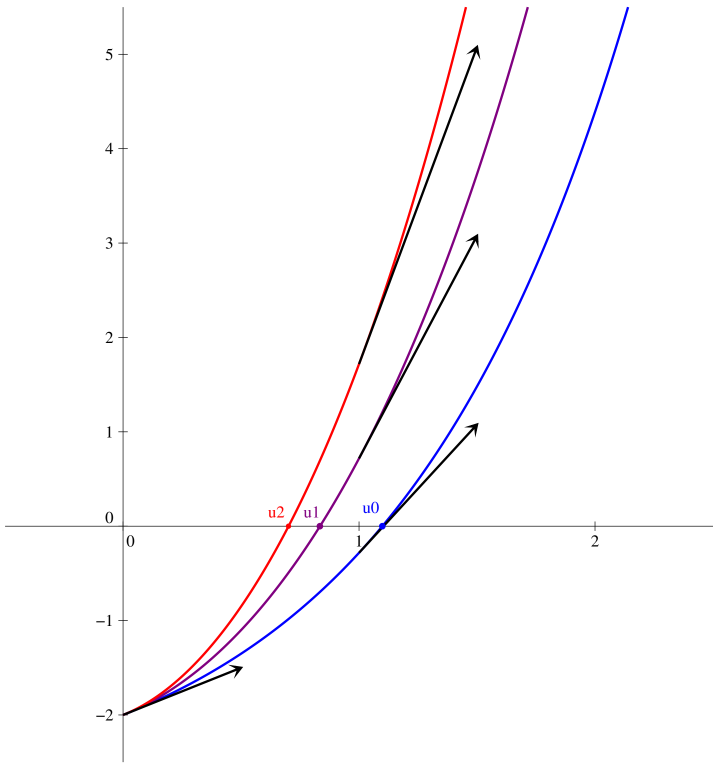
5. Inutile de faire des calculs compliqués, il suffit de constater que $(4^{-k}P+9^{-k}Q)(4^kP+9^kQ) = P^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^k PQ + \left(\frac{4}{9}\right)^k QP + Q^2 = P + Q = I_3$ pour montrer que $A^k = 4^kP + 9^kQ$ est une matrice inversible, et que son inverse A^{-k} peut s'écrire sous la forme $A^{-k} = 4^{-k}P + 9^{-k}Q$.
6. Puisqu'il s'agit de trouver une racine carrée, on a bien envie de tenter la formule précédente avec $k = \frac{1}{2}$. Calculons donc $B = 2P + 3Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et on constate alors que $B^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = A$.
7. Il est évident que $-B = -2P - 3Q$ va aussi fonctionner puisque $(-B)^2 = B^2 = A$. Mais on peut aussi s'en sortir avec la matrice $C = 2P - 3Q$, qui a bien pour carré $(2P - 3Q)^2 = 4P^2 + 9Q^2 = 4P + 9Q = A$ en exploitant les calculs de la deuxième question, et bien sûr son opposé $-C = -2P + 3Q$.

Exercice 2

1. On pose donc $f_1(x) = e^x + x^2 - 3$. La fonction f_1 est dérivable autant de fois qu'on le souhaite sur $\mathbb{R}$, et $f_1'(x) = e^x + 2x$, puis $f_1''(x) = e^x + 2$. Cette dérivée seconde est manifestement strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que f_1' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x \to -\infty} f_1'(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f_1'(x) = +\infty$ (aucune forme indéterminée), la fonction f_1' est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'annule exactement une fois. On constate facilement que $f_1'(0) = 1 > 0$, alors que $f_1'(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$, la valeur d'annulation se trouve donc entre -1 et 0. Soyons plus précis : $f_1'\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 < 0$, donc f_1' s'annule sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. En notant β cetta valeur d'annulation, f_1 est décroissante sur $]-\infty, \beta]$ et croissante sur $[\beta, +\infty[$. De plus, $\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = +\infty$ (toujours aucune forme indéterminée), et il n'y a bien sûr pas de **droite** asymptote oblique en $-\infty$ contrairement à ce que sous-entendait l'énoncé. On peut simplement dire que $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) - (x^2 - 3) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc la courbe de f_1 se rapproche de celle de la parabole d'équation $y = x^2 - 3$ du côté de $-\infty$. Sur la courbe ci-dessous, on a indiqué cette parabole en pointillés. Pour l'ordonnée du minimum, on le place légèrement en-dessous de $f_1(0) = -2$:



2. La fonction f_n est une somme de fonctions croissantes, donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. Puisque $f_n(0) = -2$, et $f_n'(x) = e^x + 2nx$ vérifie $f_n'(0) = 1$, la tangente en 0 a pour équation $y = x - 2$ (elle est commune à toutes les courbes f_n). De même, on calcule $f_n(1) = e + n - 3$, et $f_n'(1) = e + 2n$, donc la tangente en 1 a pour équation $y = (e + 2n)(x - 1) + e + n - 3 = (e + 2n)x - 3 - n$.
4. Les tangentes en 1 ont respectivement pour équations $y = ex - 3$, $y = (e + 2)x - 4$ et $y = (e + 4)x - 5$, elles sont bien sûr de plus en plus pentues, mais celle de f_0 a déjà une pente $e \simeq 2.7$. Voici l'allure demandée :



5. Puisque $f_n(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, les fonctions f_n sont toutes bijectives de $[0, +\infty[$ vers $[-2, +\infty[$ et s'annulent donc exactement une fois sur $\mathbb{R}^+$. Le graphique semble suggérer que la suite (u_n) est décroissante (et peut-être qu'elle tend vers 0, mais c'est moins clair).
6. Le terme u_0 est solution de l'équation $e^x = 3$, on a donc $u_0 = \ln(3)$. Le fait que u_n soit strictement positif est trivial. De plus, $f_n(1) = e + n - 3$ devient strictement positif dès que $n \geqslant 1$, ce qui prouve que $u_n < 1$ en exploitant la croissance de la fonction f_n.
7. Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, donc $e^{u_{n+1}} = 3 - (n+1)u_{n+1}^2$. On en déduit que $f_n(u_{n+1}) = e^{u_{n+1}} + nu_{n+1}^2 - 3 = -u_{n+1}^2 < 0$. Comme $f_n(u_n) = 0$, on a donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$, ce qui implique, toujours par croissance de la fonction f_n, que $u_{n+1} < u_n$. Autrement dit, la suite est décroissante comme prévu. Étant minorée par 0, elle converge donc.
8. Notons l la limite de la suite, qui est nécessairement positive. Si $l \neq 0$, alors $\underset{n\to+\infty}{n}\, u_n^2 = +\infty$. Or, $e^{u_n} = 3 - nu_n^2$ aurait alors une limite égale à $-\infty$, ce qui est très embêtant pour une exponentielle. C'est absurde, donc $l = 0$.
9. Toujours en reprenant l'équation définissant u_n, on a $nu_n^2 = 3 - e^{u_n}$. Comme on sait désormais que (u_n) converge vers 0, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nu_n^2}{2} = \dfrac{3 - e^0}{2} = 1$. Tout étant positif, on peut tranquillement prendre la racine carrée pour en déduire la limite demandée.

Exercice 3

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -11 & -8 \\ 8 & -7 & -8 \\ -5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$. Si on avait une relation de la forme $A^2 = aA + bI_3$, les coefficients en-dehors de la diagonale de la matrice A^2 seraient proportionnels à ceux de A, ce qui n'est pas le cas (les deux derniers de a première ligne sont déjà incohérents puisqu'ils imposent $a = \dfrac{11}{3}$ et $a = 4$). Une telle relation n'existe donc pas.
2. Calculons : $B = (A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, puis $B(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
3. En développant brutalement le calcul précédent, on a prouvé que $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$, soit $A\left(\dfrac{1}{6}A^2 - A + \dfrac{11}{6}I_3\right) = I_3$. La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \dfrac{1}{6}A^2 - A + \dfrac{11}{6}I_3$.
4. On va procéder à l'aide d'une résolution de système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + y & + & z & = & a \\ x & & + & z & = & b \\ & y & - & z & = & c \end{array}\right.$. La différence des deux premières équations donne $y = a - b$, il suffit de remplacer dans la dernière équation pour trouver $z = y - c = a - b - c$, puis dans la première pour avoir $x = a - y - z = -a + 2b + c$. Finalement, la matrice P est inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Pour changer, calculons $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, puis $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ouf, la matrice est diagonale, je ne suis pas obligé de recommencer mon calcul.
6. Par définition, $D = P^{-1}AP$. En multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1}, on en déduit que $A = PDP^{-1}$. On prouve ensuite par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$.

C'est vrai au rang 0 puisque $P^{-1}D^0P = P^{-1}P = I_3 = A^0$, et si on suppose la formule vérifiée pour un certain entier n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, exactement ce qu'on voulait prouver.

7. On a bien sûr $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, donc $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & -3^n \end{pmatrix}$, et enfin $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n - 1 & 2 - 2^n - 3^n & 1 - 3^n \\ 3^n - 1 & 2 - 3^n & 1 - 3^n \\ 2^n - 3^n & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}$. Si on a peur de s'être égaré en cours de calcul, on vérifie que la matrice A^2 calculée en début d'exercice correspond à cette formule.

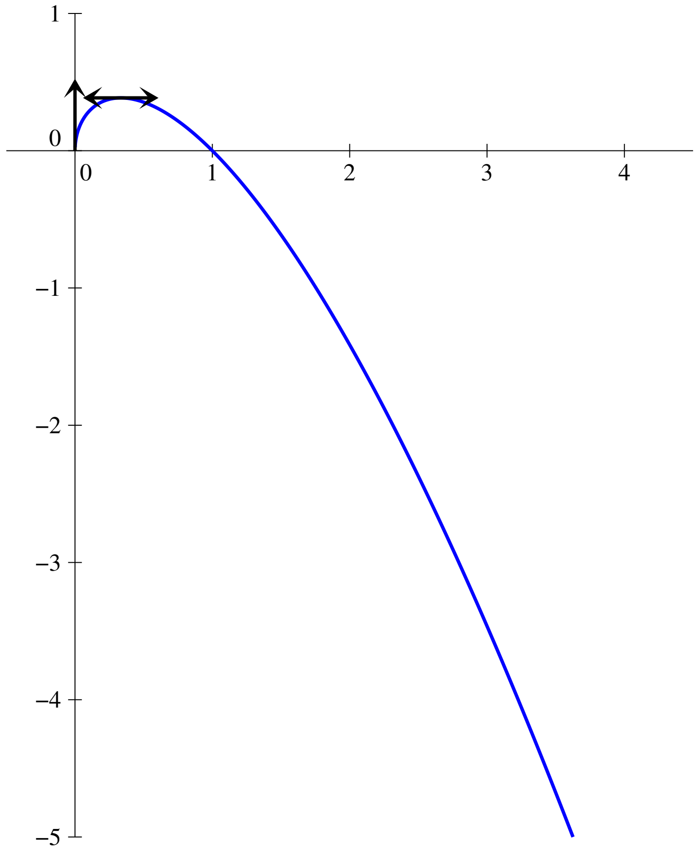
8. La formule donne un inverse qui serait égal à $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 & 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - 1 & 2 - \frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Eh bien, quand on multiplie cette matrice par la matrice A, on obtient bel et bien l'identité. Alternativement, on calcule $A^2 - 6A + 11I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ -4 & 10 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et on exploite le résultat de la question 3. Dans les deux cas, on constate que la formule fonctionne bel et bien.

Exercice 4

1. Commençons par la fonction f, qui est définie et continue sur $[0, +\infty[$ mais dérivable (et deux fois dérivable) a priori seulement sur $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, $f'(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}}$, qui s'annule en $\dfrac{1}{3}$, et $f''(x) = \dfrac{-6\sqrt{x} - \frac{1-3x}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{-1-3x}{4x\sqrt{x}}$, qui est négative sur $]0, +\infty[$. Reste à étudier ce qui se passe aux bords de l'intervalle de définition : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$, ce qui prouve la présence d'une tangente verticale à la courbe à l'origine. On résume toutes ces informations dans le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	

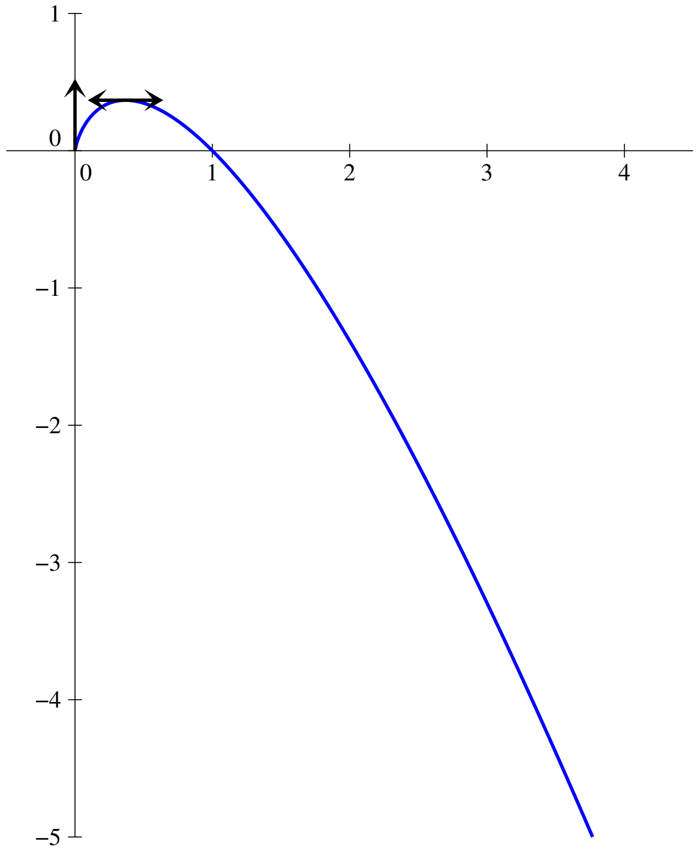
Et la courbe correspondante (on note bien sûr que f s'annule pour $x = 1$) :



Passons à l'étude de la fonction g, qui est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ (croissance comparée). On peut donc prolonger g en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $g(0) = 0$. On peut alors calculer $\tau_{0,g}(h) = \dfrac{g(h)}{h} = -\ln(h)$, qui tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0. Il y aura donc une tangente verticale à la courbe représentative de g à l'origine du repère. Passons aux variations et à la convexité : $g'(x) = -\ln(x) - 1$, qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{e}$, et $g''(x) = -\dfrac{1}{x}$ est toujours négative. On calcule $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e} \times (-1) = \dfrac{1}{e}$ et on peut dresser le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	↗	$\frac{1}{e}$	↗	$-\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	

On achève avec la deuxième courbe (cette fonction aussi s'annule en $x = 1$) :



2. La fonction h est dérivable, et $h(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} + \ln(x)$, donc $h'(x) = \dfrac{-\sqrt{x} - \frac{1-x}{2\sqrt{x}}}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1-x}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1-x+2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = -\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$.
3. La fonction h est décroissante sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$. Comme $h(1) = 0$, elle est donc positive sur $]0, 1]$ et négative sur $[1, +\infty[$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]0, 1[$, puis en-dessous sur $]1, +\infty[$.
4. L'équation ne peut pas avoir de solution sur $[0, 1]$, où g prend des valeurs positives. Sur $[1, +\infty[$, g est continue et décroissante, donc bijective vers l'intervalle $]-\infty, 0]$. En particulier, elle prend exactement une fois la valeur -24.
5. Puisque g est décroissante, il suffit de calculer $g(9) = -9\ln(9) = -18\ln(3) > -24$ puisque $\ln(3) < \dfrac{4}{3}$, et $g(12) = -12\ln(12) = -12\ln(4 \times 3) = -24\ln(2) - 12\ln(3) < -12 - 12 = -24$. La fonction g prend donc bien la valeur -24 sur l'intervalle $[9, 12]$ (théorème des valeurs intermédiaires si on tient à citer un résultat justificatif).
6. La fonction k est décroissante sur $[9, 12]$ puisque la fonction ln est croissante (et ne s'y annule pas). Or, $k(9) = \dfrac{24}{2\ln(3)} = \dfrac{12}{\ln(3)} < 12$, et $k(12) = \dfrac{24}{2\ln(2) + \ln(3)} > \dfrac{24}{2.5} > 9$. La dérivée k' est définie par $k'(x) = \dfrac{-24}{x\ln^2(x)}$, elle est négative et croissante sur $[9, 12]$ (son dénominateur étant positif et strictement croissant sur cet intervalle de façon évidente), donc $\forall x \in [9, 12]$, $|k'(x)| \leqslant -k'(9) = \dfrac{24}{9\ln^2(9)} = \dfrac{24}{36\ln^2(3)} = \dfrac{2}{3\ln^2(3)}$.
7. (a) C'est la récurrence ultra classique vue quelques fois en cours cette semaine : au rang 0, il faut prouver que $|u_0 - \alpha| \leqslant 9$, ce qui est vrai car $\alpha \in [9, 12]$. Supposons ensuite l'inégalité correcte au rang n, alors en appliquant le résultat donné par l'énoncé puis l'hypothèse de récurrence, on effectue la majoration $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha| \leqslant K \times 3K^n = 3K^{n+1}$.

(b) Comme on a bien sûr $0 \leqslant |u_n - \alpha|$, et que par ailleurs $3\ln^2(3) \simeq 3.6 > 2$, le thorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, et donc que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

(c) On aura avec certitude $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ si $3K^n \leqslant 10^{-3}$, donc si $\ln(3) + n\ln(K) \leqslant -3\ln(10)$, ou encore (en changeant le sens de l'inégalité car on divise par un facteur négatif) $n \geqslant \dfrac{-3\ln(10) - \ln(3)}{\ln(K)} = \dfrac{3\ln(10) + \ln(3)}{\ln(3) + \ln(\ln^2(3)) - \ln(2)}$. Pour information, cela donne $n = 14$ comme plus petite valeur entière convenable.