Devoir Surveillé n° 6

MPSI Lycée Camille Jullian

3 février 2024

Exercice 1

On considère dans cet exercice la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. On notera comme d'habitude I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. Déterminer deux matrices P et Q appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $P + Q = I_3$ et $4P + 9Q = A$. On écrira explicitement les matrices P et Q.
2. Calculer les produits PQ et QP, ainsi que P^2 et Q^2 (on doit obtenir à chaque fois un résultat remarquable).
3. Démontrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = 4^k P + 9^k Q$.
4. Calculer l'inverse de la matrice A par la méthode du pivot de Gauss (ou en résolvant un système si vous préférez), puis vérifier que la formule de la question précédente reste valable pour $k = -1$.
5. Démontrer plus généralement que cette formule est en fait vraie pour tout entier relatif k.
6. En s'inspirant des formules précédentes, trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$.
7. Sans calcul supplémentaire ou presque, déterminer trois autres « racines carrées » de la matrice A.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$.

1. Étudier le plus complètement possible la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que f_1' s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$, sans chercher à calculer cette valeur d'annulation, mais en en donnant au moins un encadrement de largeur $\frac{1}{2}$. On donnera aussi l'équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de f_1 en $-\infty$, et on tracera une allure crédible de la courbe.
2. Étudier plus généralement les variations de la fonction f_n, mais uniquement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f_n en son point d'abscisse 0. Faire de même au point d'abscisse 1.
4. Tracer dans un même repère une allure des courbes des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur l'intervalle $[0, +\infty[$ tenant compte des calculs précédents.
5. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive, qu'on notera désormais u_n. Indiquer les positions de u_0, u_1 et u_2 sur le graphique précédent. Que peut-on conjecturer sur la suite (u_n) ?
6. Calculer u_0, puis montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in]0, 1[$.
7. Déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$, en déduire la monotonie de la suite (u_n), puis la convergence de la suite.
8. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
9. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} u_n = 1$.

Exercice 3

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Existe-t-il des réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$ (on justifiera bien sûr rigoureusement la réponse donnée) ?
2. Calculer $(A - I_3)(A - 2I_3)(A - 3I_3)$. Si vous n'obtenez pas quelque chose de très simple, recommencez.
3. Déduire de la question précédente que A est inversible, et donner son inverse (on se contentera d'une expression formelle, sans donner tous les coefficients de la matrice A^{-1}).
4. Montrer que la matrice P est inversible, et donner son inverse P^{-1}.
5. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue. Si D n'est pas une matrice diagonale, recommencez.
6. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.
7. Calculer explicitement la matrice A^n.
8. La formule obtenue à la question précédente reste-t-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 4

On s'intéresse dans cet exercice aux deux fonctions f et g définies par $f(x) = (1 - x)\sqrt{x}$ et $g(x) = -x\ln(x)$. On notera $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de ces deux fonctions.

1. Effectuer une étude complète des deux fonctions f et g : limites, prolongements par continuité et dérivabilité éventuelle aux points correspondants, variations, convexité, et bien entendu un tracé des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ pour conclure en beauté.
2. On pose $h(x) = \dfrac{f(x) - g(x)}{x}$. Calculer la dérivée h' de la fonction h, et la mettre sous la forme la plus simple possible (on doit en particulier réussir à factoriser le numérateur de la fraction obtenue).
3. Déterminer les variations de la fonction h, et en déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = -24$ admet une unique solution qu'on notera désormais α.
5. Montrer que $\alpha \in [9, 12]$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.7$ et $\ln(3) \simeq 1.1$).
6. On pose $k(x) = \dfrac{24}{\ln(x)}$. Montrer que, $\forall x \in [9, 12]$, $k(x) \in [9, 12]$, et $|k'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3\ln^2(3)}$. On notera pour la suite $K = \dfrac{2}{3\ln^2(3)}$.
7. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = k(u_n)$. Comme l'IAF n'était pas au programme des révisions pour ce devoir, on vous donne le résultat suivant (qui découle des calculs de la question précédente) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha|$.
   (a) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant 3K^n$ (on procèdera par récurrence).
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge vers α.
   (c) Déterminer une valeur de n (la plus petite possible) pour laquelle on peut affirmer que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. On se contera d'une formule théorique sans chercher à donner une valeur concrète de n.