Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 décembre 2023

Exercice 0

On va bien sûr effectuer un pivot de Gauss, en évitant d'effectuer des opérations « dangereuses » selon les valeurs de paramètre m. Comme x n'a aucun coefficient faisant intervenir m, on a intérêt à éliminer d'abord x des deux dernières équations, ce qui ne peut pas poser de problème (on se permettra juste de combiner L_3 avec L_2 plutôt qu'avec L_1) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & my & + & 2z & = & 5 \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ 7x & + & 3y & + & (m-5)z & = & 7 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ & & (2m+3)y & + & 5z & = & 14 \\ & & (7m+3)y & + & (m+9)z & = & 42 \qquad L_3 \leftarrow 5L_3 - (m+9)L_2 \end{array}\right.$$

Le coefficient de y dans la dernière équation va devenir $5(7m+3) - (m+9)(2m+3) = 35m + 15 - 2m^2 - 3m - 18m - 27 = -2m^2 + 14m - 12$, et la constante vaudra $5 \times 42 - 14(m+9) = 210 - 14m - 126 = 84 - 14m$. Quitte à tout diviser par -2 dans cette nouvelle équation, on obtient le système équivalent :

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ & & (2m+3)y & + & 5z & = & 14 \\ & & (m^2-7m+6)y & & & = & 7m-42 \end{array}\right.$$

Le coefficient m^2-7m+6 a pour discriminant $\Delta = 49-24 = 25$, et s'annule pour $m_1 = \dfrac{7-5}{2} = 1$ et pour $m_2 = \dfrac{7+5}{2} = 6$. Autrement dit, on peut le factoriser sous la forme $(m-1)(m-6)$ (on remarquera que le membre de droite s'écrivant $7(m-6)$, il y a de la simplification dans l'air). Il est temps de distinguer des cas, trois pour être précis :

- si $m = 1$, la dernière équation devient $0y = -35$, le système est donc incompatible, et $\mathcal{S} = \emptyset$.
- si $m = 6$, la dernière équation devient $0y = 0$, ce qui est plus intéressant. On remonte le système : L_2 peut s'écrire $21y + 5z = 14$, soit $y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{21}z$, et la première donne $2x = 4 - z - 3y = 4 - z - 2 + \dfrac{5}{7}z$, d'où $x = 1 - \dfrac{1}{7}z$. Finalement, le système a une infinité de solutions : $\mathcal{S} = \left\{\left(1 - \dfrac{1}{7}z, \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{21}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$.
- enfin, dans le cas général, on aura après simplification de L_3 : $(m-1)y = 7$, soit $y = \dfrac{7}{m-1}$. On remonte le système : $5z = 14-(2m+3)y = 14 - \dfrac{7(2m+3)}{m-1} = -\dfrac{35}{m-1}$, donc $z = -\dfrac{7}{m-1}$, puis $2x = 4 - 3y - z = 4 - \dfrac{21}{m-1} + \dfrac{7}{m-1} = \dfrac{4m-18}{m-1}$, donc $x = \dfrac{2m-9}{m-1}$. Finalement, le système est de Cramer, et $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{2m-9}{m-1}, \dfrac{7}{m-1}, -\dfrac{7}{m-1}\right)\right\}$.

Exercice 1

1. Dans ce cas, $u_1 = \frac{-4}{2} = -2$, donc $u_1 = u_0$. Par récurrence triviale, on aura $u_n = -2$ pour tout entier n, la suite est donc constante égale à -2.
2. Si (u_n) converge vers l, alors u_{n+1} a aussi pour limite l, et on peut passer à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite (u_n) : $l = \frac{3l+2}{l+4}$, donc $l^2 + 4l = 3l + 2$, ou encore $l^2 + l - 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et admet pour racines $l_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $l_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$. Les seules limites possibles pour notre suite sont donc $l = -2$ (cas déjà constaté dans la première question) et $l = 1$ (cas qui sera au moins réalisé si $u_0 = 1$, puisque la suite sera également constante dans ce cas).
3. On procède bien sûr par récurrence, en posant P_n : $u_n \geqslant -2$. L'initialisation est donnée par l'énoncé. Supposons donc que $u_n \geqslant 2$ pour un certain rang n, alors $u_n + 4 > 0$ donc $u_{n+1} \geqslant -2 \Leftrightarrow 3u_n + 2 \geqslant -2u_n - 8$, soit $5u_n \geqslant -10$, ce qui est vrai par hypothèse de récurrence. On a bien prouvé l'hérédité, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.
4. C'est exactement le même principe qu'à la question précédente : on sait que $u_n \geqslant -2$, donc $u_n + 4 > 0$, alors $u_{n+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow 3u_n + 2 \geqslant u_n + 4$, soit $2u_n \geqslant 2$, ou encore $u_n \geqslant 1$.
5. Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ (on a repris le calcul de la question 2 pour factoriser le numérateur). Le dénominateur est ici toujours positif, de même que le facteur $u_n + 2$ (on rappelle que $u_n \geqslant -2$). Le signe dépend donc uniquement de celui de $u_n - 1$. On distingue donc deux cas :
   - si $u_0 \geqslant 1$, la question 4 permet de prouver (récurrence triviale) que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. On en déduit alors que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (on n'oublie pas le signe $-$ devant la fraction), et la suite (u_n) est alors décroissante.
   - si $-2 < u_0 \leqslant 1$, on aura $u_n \leqslant 1$ (toujours d'après la question 4, et toujours pas récurrence triviale, puisqu'on a démontré une équivalence à la question 4), et la suite sera croissante.
6. Si $u_0 \geqslant 1$, la suite est décroissante minorée par 1, donc elle converge. Comme elle ne peut manifestement pas converger vers -2, on a donc nécessairement $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$. Si $u_0 = -2$, on a déjà vu que la suite était constante, et convergeait donc vers -2. Si $u_0 \in]-2, 1]$, la suite est croissante et majorée par 1, donc convergente. Elle ne peut pas converger vers -2 car elle est minorée par $u_0 > -2$, donc on a à nouveau $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$. En fait, la seule valeur de u_0 pour laquelle on a convergence vers -2 est $u_0 = -2$ (le point fixe -2 est répulsif, alors que le point fixe 1 est attractif).
7. On calcule $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{2}{5} v_n$. On obtient bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
8. Comme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2}$, on peut simplement dire que $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2}$. Ensuite, on repart de la définition de v_n pour écrire que $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$, donc $2v_n + 1 = u_n(1 - v_n)$, puis $u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$. On peut remplacer v_n par l'expression précédente mais ça n'a essentiellement aucun intérêt.

Exercice 2

1. Calculons donc $(q-1)S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} kq^k$. On peut sans problème supprimer de chaque somme le premier terme (qui est nul à chaque fois), et faire un décalage d'indice dans la première somme pour simplifier le tout : $(q-1)S_n = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)q^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k = nq^{n+1} + \sum_{k=2}^{n}(k-1)q^k - \sum_{k=2}^{n} kq^k - q = nq^{n+1} - q - \sum_{k=2}^{n} q^k = nq^{n+1} - q - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 1 + q = nq^{n+1} + 1 + \frac{q^{n+1}-1}{1-q} = \frac{nq^{n+1} - nq^{n+2} + 1 - q + q^{n+1} - 1}{1-q} = \frac{(n+1)q^{n+1} - nq^{n+2} - q}{1-q}$. Finalement, on obtient $S_n = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$.

2. Bien sûr, en dérivant simplement la somme, on a $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$, donc $S_n = qf'(q)$. Or, la fonction f peut s'expliciter puisqu'il s'agit d'une somme géométrique : $\forall q \neq 1$, $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction f est donc dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et on peut tout bêtement dériver le quotient : $f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$ $= \frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. On retrouve bien $S_n = qf'(q) = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$.

3. Calculons à l'aide d'un décalage d'indice : $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i+1}^{n} q^k\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i-1} q^{k+i+1} = \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} \times \frac{1-q^{n-i}}{1-q} = \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{i+1}-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - (n+1)q^n\right)$ $= \frac{q(1-q^{n+1}-(n+1)q^n+(n+1)q^{n+1})}{(1-q)^2} = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$. Incroyable, on retrouve encore la même formule !

4. La récurrence est assez facile une fois qu'on a la formule. Pour $n = 0$, la somme est nulle (elle contient un seul terme égal à 0), et $\frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2} = \frac{q-q}{(1-q)^2} = 0$, donc l'initialisation fonctionne. Supposons la formule vraie au rang n, alors $\sum_{k=0}^{n+1} kq^k = \sum_{k=0}^{n} kq^k + (n+1)q^{n+1} = \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2} + (n+1)q^{n+1}$ $= \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}+(n+1)q^{n+1}-(2n+2)q^{n+2}+(n+1)q^{n+3}}{(1-q)^2}$ $= \frac{q-(n+2)q^{n+2}+(n+1)q^{n+3}}{(1-q)^2}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $n+1$. La formule est donc héréditaire, elle est valable pour tout entier naturel n.

5. D'après les questions précédentes, $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{n}{2^{n+2}}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$. Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2$.

Problème : étude d'un ensemble de Julia.

A. Quelques généralités.

1. Supposons donc que la suite (z_n) converge vers une limite l, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} z_{n+1} = l$, et en passant à la limite dans la relation de récurrence définissant z_n, on obtient la relation $l = l + l^2$, donc $l^2 = 0$, ce qui implique évidemment $l = 0$.
2. Si $z_0 = 0$, la suite est constante égale à 0, donc converge certainement vers 0. Si $z_0 = -1$, c'est à peine plus compliqué puisqu'alors $z_1 = -1 + 1 = 0$,e t la suite est dans ce cas stationnaire égale à 0 à partir du rang 1, elle converge donc également vers 0.
3. Commençons par constater que, par récurrence triviale, si $a > 0$, alors tous les termes de la suite sont des réels strictement positifs. On peut alors calculer $z_{n+1} - z_n = z_n + z_n^2 - z_n = z_n^2 > 0$, donc la suite est strictement croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite réelle $l \geqslant a > 0$, ce qui est impossible. La suite est donc divergente et $a \notin D$.
4. Si on pose $z_0 = -1-a$, alors $z_1 = -1-a+(-1-a)^2 = -1-a+1+2a+a^2 = a^2+a$, autrement dit z_1 prend la même valeur que si $z_0 = a$. Bien entendu tous les termes suivants des deux suites seront alors égaux, et leur nature sera donc identique. Si $a < -1$, alors $-1-a > 0$, donc la suite obtenue en partant de $z_0 = -1-a$ diverge, et celle obtenue pour $z_0 = a$ également.
5. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : a \mapsto a + a^2$ sur l'intervalle $]-1, 0[$. La fonction est dérivable, et $f'(a) = 1 + 2a$, donc f est décroissante puis croissante, avec pour minimum $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}$, et pour maximum $f(-1) = f(0) = 0$ (qui sont techniquement des limites si f est définie sur l'intervalle ouvert). Cela prouve bien que $f(]-1,0[) = \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right[$. Par récurrence triviale, on a bien $-\dfrac{1}{4} \leqslant z_n < 0$ dans ce cas (c'est vrai pour $n = 1$ d'après le calcul précédent, et si $z_n \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right[$, alors a fortiori $z_n \in]-1, 0[$, donc $z_{n+1} = f(z_n) \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right[$. La suite est alors bornée, et elle est toujours croissante, puisque $z_{n+1} - z_n = z_n^2$ qui est toujours positif quand z_n est un réel. Elle converge donc (nécessairement vers 0).
6. On a traité tous les cas : si $a < -1$ ou $a > 0$, la suite diverge. Si $a \in]-1, 0[$, la suite converge, et si $a = -1$ ou $a = 0$ elle converge également. Finalement, les valeurs pour lesquelles elle converge sont celles de l'intervalle $[-1, 0]$.
7. Comme la conjugaison est compatible avec le produit et la somme, on aura toujours $\overline{z + z^2} = \overline{z} + \overline{z}^2$. Par récurrence triviale, les termes des deux suites obtenus à partir de $z_0 = a$ et $z_0 = \overline{a}$ seront donc toujours conjugués. Or, si la suite (z_n) converge vers $l = a + ib$, alors la suite $(\overline{z_n})$ converge vers $\overline{l} = a - ib$, et réciproquement. La nature des deux suites est donc la même. L'ensemble D est donc symétrique par rapport à l'axe réel (si $a \in D$, alors $\overline{a}$, qui est le symétrique de a par rapport à cet axe, est aussi dans D).
8. Les points d'affixe a et $-1-a$ dans le plan complexe sont symétriques par rapport au point d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ (en effet, leur moyenne $\dfrac{a + (-1-a)}{2}$ est toujours égale à $-\dfrac{1}{2}$). L'ensemble D est donc lui aussi symétrique par rapport à ce point. Combinée à la symétrie par rapport à l'axe réel, on en déduit une troisième symétrie par rapport à la droite « verticale » correspondant à $\text{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$.

B. Un encadrement de l'ensemble D.

1. En ayant posé $z = a + ib$, on calcule $z + z^2 = a + ib + a^2 + 2iab - b^2 = a + a^2 - b^2 + i(b + 2ab)$. L'hypothèse $a \in]-1, 0[$ implique que $a + a^2 \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right[$ (question $A.5$). De plus, $-\dfrac{3}{4} < -b^2 \leqslant 0$

avec l'hypothèse faite $z \in E$. On peut donc additionner les encadrement pour en déduire que $-1 < a + a^2 - b^2 < 0$ (on obtient bien des inégalités strictes des deux côtés), ce qui prouve que la partie réelle de $z + z^2$ est dans le bon intervalle. La partie imgainaire, elle, peut s'écrire sous la forme $b(1+2a)$. Or, $-2 < 2a < 0$, donc $-1 < 1+2a < 1$. Autrement dit, $|1+2a| < 1$, donc $|b(1+2a)| < |b|$, ce qui assure que notre partie imaginaire reste comprise entre $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement, $z + z^2$ est bien dans E.

2. Si $z_0 \in E$ (l'énoncé utilisait la notation a pour désigner deux choses différentes, ce qui n'est pas très malin), une récurrence évidente à partir du résultat de la question précédente montre que $z_n \in Z$ pour tout indice n. Le calcul effectué sur les parties imaginaires prouve alors que $|b_{n+1}| = |b_n| \times |1+2a_n| < |b_n|$. La suite $(|b_n|)$ est donc bien strictement décroissante. Comme elle est évidemment minorée par 0 (elle est constituée de résl positifs !), elle converge.

3. Supposons donc que $(|b_n|)$ converge vers une limite $l \neq 0$, alors $|b_{n+1}|$ converge aussi vers l, et on peut effectuer le quotient dans la relation précédente : $|1 + 2a_n| = \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$ a pour limite 1. Problème, on ne connaît pas le signe de $|1 + 2a_n|$, donc on ne peut pas prétendre que cette expression a une limite. Pour contourner, élevons au carré : $(1 + 2a_n)^2 = |1 + 2a_n|^2$ va tendre vers 1, donc en développant, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4a_n + 4a_n^2 = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + a_n^2 = 0$. Or, on a calculé plus haut $a_{n+1} = a_n + a_n^2 - b_n^2$. On aurait donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0 - l^2 = -l^2$. Autrement dit, la suite (a_n) convergerait vers $-l^2$, donc $a_n + a_n^2$ convergerait vers $-l^2 + l^4$. Comme on sait déjà que cette même suite est censée avoir une limite nulle, on en déduit (enfin) la relation $l^4 - l^2 = 0$, soit $l^2(l - 1)(l + 1) = 0$. Les seules valeurs possibles pour l sont donc $l = 0$ (évidemment exclue puisqu'on a justement fait l'hypothèse $l \neq 0$), $l = 1$ et $l = -1$. Mais ces deux dernières hypothèses sont incomptibles avec le fait que $-\frac{\sqrt{3}}{2} < b_n < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aucune possibilité n'est donc cohérente, ce qui prouve par l'absurde que $l = 0$.

4. Par définition, $|z_{n+1}| = |z_n + z_n^2| = |1 + z_n| \times |z_n|$. On sait déjà que la suite $(|b_n|)$ est décroissante, on peut donc affirmer que $b_{n+1}^2 \leqslant b_n^2$. On en déduit que $b_{n+1}^2 + a_{n+1} \leqslant b_n^2 + a_{n-1}$. Comme $a_{n+1} = a_n + a_n^2 - b_n^2$, en découle la majoration $b_{n+1}^2 + a_{n+1} \leqslant b_n^2 + a_n + a_n^2 - b_n^2 = a_n + a_n^2 \leqslant 0$ d'aprèes les calculs déjà effectués (question $A.5$ encore et toujours). On peut alors écrire que $|1 + z_n|^2 = (1 + a_n)^2 + b_n^2 = 1 + 2a_n + a_n^2 + b_n^2 \leqslant 1$ car on sait d'une part que $a_n + a_n^2 \leqslant 0$, et de plus que $b_n^2 + a_n \leqslant 0$. De cette inégalité découle le fait que $|z_{n+1}| \leqslant |z_n|$, donc que la suite des modules est décroissante. Comme elle est bien entendu minorée par 0, elle converge donc.

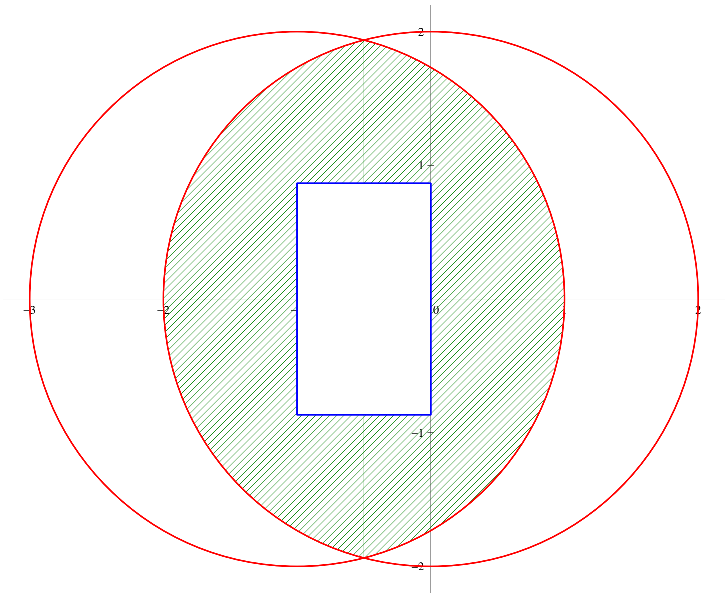
   On sait donc désormais que la suite $(a_n^2 + b_n^2)$ converge (en tant que carré du module de z_n). Comme (b_n^2) converge (vers 0), (a_n^2) converge donc aussi, et comme a_n est toujours négatif, (a_n) converge nécessairement (le seul cas où une suite diverge alors que son carré converge serait le cas d'une aleternance de signes, avec deux limites de sous-suites opposées). Autrement dit, (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux, donc z_n également. La limite de la suite (z_n) est accessoirement nulle, puisqu'il s'agit toujours de la seule limite possible pour cette suite.

5. Là encore, l'hypothèse est que $|z_0| \geqslant 2$ (et pas que la partie réelle de z_0 est supérieure ou égale à 2, ce qui serait toutefois une restriction du cas souhaité qui fonctionnerait quand même). On va simplement prouver par récurrence que $|z_n| \geqslant 2$. C'est vrai pour $n = 0$ par hytpohèse. Supposons que $|z_n| \geqslant 2$, alors par inégalité triangulaire, $|z_n + 1| \geqslant |z_n| - 1 \geqslant 1$ (c'est le sens inhabituel de l'inégalité triangulaire), donc $|z_{n+1}| = |z_n + 1| \times |z_n| \geqslant |z_n| \geqslant 2$, ce qui prouve l'inégalité au rang $n+1$ et achève la récurrence. La suite (z_n), si elle convergeait, convergerait forcément vers 0, ce qui est impossible quand $|z_n| \geqslant 0$. One ne peut donc pas avoir $a \in D$.

6. S'il existe un entier n_0 pour lequel $|z_{n_0}| > 2$, ce sera le cas pour tous les entiers supérieurs à n_0 en exploitant le même raisonnement qu'à la question précédente. Il suffit donc de vérfier que

$|z_1| > 2$. Or, si on avait $|z_1| = 2$, on aurait $|z_0| = 2$ et $|z_0 + 1| = 1$ (toujours en exploitant la relation $|z_{n+1}| = |1 + z_n| \times |z_n|$. Autrement dit, le point d'affixe z_n appartiendrait à la fois au cercle centré en l'origine et de rayon 2, et au cercle centré en -1 et de rayon 1. Le seul point d'intersection entre ces deux cercles est celui d'affixe -2. Or, si $z_0 = -2$, $z_1 = -2 + 4 = 2$, puis $z_2 = 2 + 4 = 6$. L'énoncé racontait donc une nouvelle fois n'importe quoi, il y a bien **une** valeur de a pour laquelle $|z_1| = 2$, par contre l'inégalité devient stricte pour tout le monde à partir de $n = 2$.

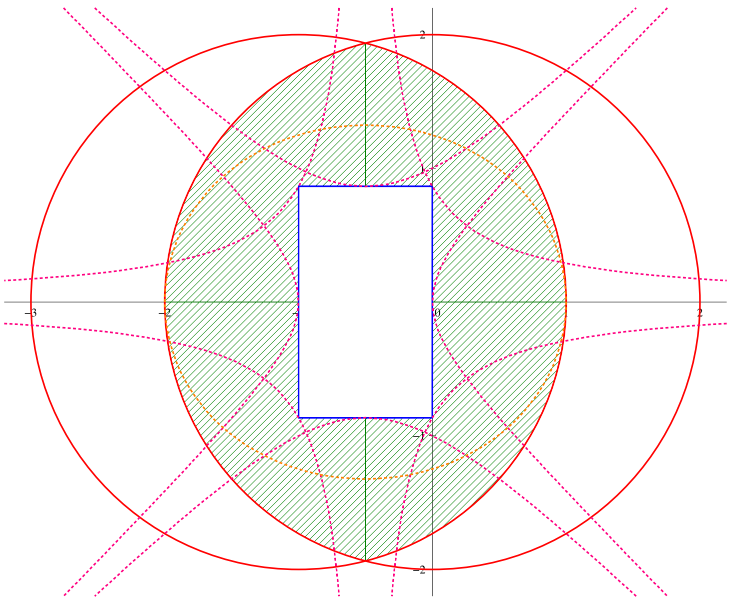
7. Posons donc $q = |z_2| - 1$, qui est strictement supérieur à 1 d'après le raisonnement de la question précédente. Toujours en exploitant l'inégalité triangulaire, on aura, pour tout entier $n \geqslant 2$, $|z_n + 1| \geqslant |z_n| - 1 \geqslant q$ (rappelons que la suite des modules étant croissante, on aura bien $|z_n| \geqslant |z_n|$), donc $|z_{n+1}| \geqslant q|z_n|$. Par une récurrence triviale, on en déduit que, $\forall n \geqslant 2$, $|z_n| \geqslant q^{n-2} \times |z_2|$, ce qui suffit à prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty$ (puisque $q > 1$).
8. On sait déjà que D inclut l'ensemble E, qui est un rectangle déjà symétrique par rapport aux deux droites et au point signalé dans la première partie du problème. On sait également que D est inclus dans le disque ouvert centré en 0 de rayon 2 (on vient de prouver que les nombres complexes n'appartenant pas à ce disque ne pouvaient pas donner des suites convergentes). Ce disque, lui, est bien symétrique par rapport à l'axe réel, mais pas par rapport à la droite d'équation $\text{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$. On peut donc également affirmer que D est inclus dans le disque ouvert symétrique centré en -1 et de rayon 2. Autrement dit, on obtient la figure suivante (le rectangle bleu est inclus dans D, la lunule rouge délimite la zone maximale dans laquelle est inclus D, et la zone hachurée en vert est donc celle dans laquelle se situe la frontière de l'ensemble D) :



9. On a déjà calculé plus haut les parties réelles et imaginaires de $z + z^2$. L'ensemble E' est donc défini par les inéquations suivantes (en reprenant les notations plus classiques x pour l'abscisse et y pour l'ordonnée) : $-1 < x + x^2 - y^2 < 0$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < (1 + 2x)y < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. En pratique, toutes les courbes correspondantes sont des hyperboles tangentes au rectangle E. Bien sûr, si $a \in E'$, alors la suite définie par $z_0 = a$ vérifie $z_1 \in E$ (par définition !), donc converge vers 0 (on a simplement décalé les termes). C'est pour cela que $E' \subset D$. De même, en posant $f(z) = z + z^2$, les antécédents par f des éléments de E', puis les antécédents de ces antécédents, et ainsi de suite, appartiennent tous à l'ensemble D. C'est de cette façon qu'on construit des sous-ensembles de plus en plus grands contenus dans D. Symétriquement, H est inclus dans le complémentaire de D (pour la même raison : si $z_0 \in H$, alors $|z_1| \geqslant 2$, et on

sait qu'à partir de ce point la suite diverge), de même que les antécédents par f des éléments de H et ainsi de suite, ce qui permettrait cette fois d'approcher D « par l'extérieur ». Pour obtenir des équations de H, on veut simplement que $|z+z^2| \geqslant 2$, soit $|z+z^2|^2 \geqslant 4$, donc $(x+x^2-y^2)^2+(y+2xy)^2 \leqslant 4$. Pour le coup, ça ne ressemble à rien de sympathique même quand on maîtrise un peu plus que vous les courbes classiques dans le plan. Enfin si, ça ressemble à une sorte d'ellipse « de degré 4 ». Accessoirement, cette courbe est déjà symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$, pas besoin de rajouter quoi que ce soit (c'est normal, puisque les valeurs de a pour lesquelles $|f(a)| \geqslant 2$ vérifient nécessairement $|f(-1-a)| \geqslant 2$, puisque la valeur du deuxième terme des suites correspondantes est identique).

Dans le nouveau graphique ci-dessous, j'ai rajouté par rapport au premier dessin les hyperboles en rose pointillé (tous les points à l'intérieur de la zone délimitée autour du rectangle par des morceaux de ces hyperboles appartiennent donc à D), et en orange pointillé l'espèce d'ellipse extérieure dans laquelle D est inclus.



Et quand même, pour vous donner une idée de ce à quoi ressemble vraiment l'ensemble, qui est une belle fractale, en voici un aperçu piqué ailleurs (le format de mes images fait que c'est assez moche, vous n'aurez pas de mal à trouver l'original nettement plus joli sur le web en cherchant simplement « ensemble de Julia ») :