Devoir Surveillé n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

9 novembre 2023

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto x^k$ est solution de l'équation (E) pour une unique valeur de la constante réelle k (que l'on déterminera, bien entendu).
2. Dans cette question, on va résoudre l'équation par une première méthode, en posant $z(x) = xy(x)$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
   (b) Résoudre l'équation obtenue à la question précédente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
   (d) Existe-t-il des solutions de l'équation (E) (autres que la solution nulle) prolongeables par continuité en 0 ?
3. Dans cette question, on résout à nouveau l'équation (E) par une autre méthode (il est donc bien sûr interdit d'utiliser ici les résultats de la question 2), en posant cette fois-ci $y(x) = w(\ln(x)) = w(t)$ (autrement dit, on effectue le changement de variable $t = \ln(x)$).
   (a) Montrer que la fonction w est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.
   (b) Résoudre cette équation et conclure.
4. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et des conditions initiales $y(1) = y'(1) = 1$. On notera cette solution g.
5. Effectuer une étude complète de la fonction g obtenue à la question précédente (y compris l'étude de convexité), et tracer une allure soignée de la courbe intégrale correspondante.

Exercice 2

On définit dans cet exercice trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{u_{n+1}}$ et $w_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$. On suppose par ailleurs que $0 \leqslant v_0 < w_0$, et $u_0 = \dfrac{v_0}{w_0}$.

1. On suppose uniquement dans cette question que $v_0 = 1$ et $w_0 = 2$. Calculer les valeurs de u_0, u_1, u_2, v_1, v_2, w_1 et w_2. Que valent $\arccos(u_0)$ et $\arccos(u_1)$?
2. Dans le cas général, on pose $\theta = \arccos(u_0)$. Justifier que θ est bien défini et que $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Montrer par récurrence que $u_n = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$. Déduire des calculs de la question 2 une formule pour $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. Montrer que $v_1 = \dfrac{2v_0}{\sin(\theta)} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $v_2 = \dfrac{4v_0}{\sin(\theta)} \sin\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$.
5. Conjecturer une formule pour v_n (qu'on ne demande **pas** de démontrer), en déduire une formule pour w_n.
6. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent vers $\dfrac{v_0 \arccos(u_0)}{\sqrt{1-u_0^2}}$.
7. On pose dans cette dernière question $z_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$.
   (a) Montrer que $z_n = \dfrac{v_0}{v_n}$ (une rédaction peu rigoureuse sera exceptionnellement tolérée).
   (b) En déduire que la suite (z_n) converge vers une limite à préciser.
   (c) En choisissant une valeur de u_0 intelligente, en déduire la belle formule suivante, due à François VIÈTE :
   $$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots$$

Problème.

Le but de ce problème est d'étudier un modèle classique d'évolution d'une population d'individus. On considère donc une fonction n de la variable t mesurant le nombre d'individus dans une population à l'instant t. On note $n_0 = n(0)$ la population initiale (à l'instant $t = 0$). Bien entendu, $n_0 > 0$. Dans le modèle étudié, la fonction n est supposée dérivable et solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ry \times \left(1 - \dfrac{1}{K}y\right)$, où r et K sont deux paramètres strictement positifs dont on essaiera de donner un sens physique dans la suite du problème.

Dans tout le problème, les résolutions d'équations différentielles se feront sur l'intervalle $[0, +\infty[$ sur lequel la fonction n est définie. Le fait que n prenne des valeurs **réelles** alors qu'une population est censée être à valeurs **entières** n'est absolument pas à prendre en compte.

1. Étude d'une première fonction intermédiaire.
   (a) On pose dans cette question $f(t) = n(t)e^{-rt}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{r}{K}n(t)y$.
   (b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f(t) = Ae^{g(t)}$, où g est une fonction à déterminer (on notera N une primitive de la fonction n), et A une constante à déterminer en fonction des données du problème.
2. Résolution de (E) à l'aide d'une deuxième fonction intermédiaire.
   (a) Quelle caractéristique de l'équation (E) empêche de la résoudre avec les méthodes vues en cours ?
   (b) On pose désormais $h(t) = \dfrac{1}{n(t)}$. Justifier que h est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.
   (c) Montrer que h est solution de l'équation $(E_1) : y' = -ry + \dfrac{r}{K}$.
   (d) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

(e) En déduire que $n(t) = \dfrac{n_0 e^{rt}}{1 + \frac{n_0}{K}(e^{rt} - 1)}$.

On pourra reprendre cette formule pour la suite du problème même si on n'a pas réussi à l'obtenir rigoureusement.

3. Étude de la fonction n.

(a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} n(t)$. Justifier le nom de « capacité du milieu » donné par le créateur du modèle à la constante K.

(b) Étudier les variations de n, en distinguant si besoin des cas selon les valeurs prises par les paramètres du problème.

(c) On suppose pour toute la fin du problème que $n_0 < \dfrac{1}{2}K$. Montrer que n est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (on essaiera d'être rigoureux) et que $n''(t) = r^2 n(t) \times \left(1 - \dfrac{1}{K}n(t)\right)\left(1 - \dfrac{2}{K}n(t)\right)$.

(d) Montrer qu'il existe un unique réel $t_0 > 0$ tel que $n''(t_0) = 0$.

(e) Étudier la convexité de la fonction n.

(f) Calculer $n(t_0)$ et justifier l'affirmation suivante : « dans ce modèle, la date à laquelle la croissance de la population commence à ralentir correspond au moment où elle atteint la moitié de sa valeur limite ».

(g) Tracer une allure crédible de la courbe représentative de n quand $n_0 = 1$, $K = 4$ et $t_0 = 3$. On tracera en même temps les tangentes à la courbe en $t = 0$ et en $t = t_0$.

4. Estimation du paramètre r.

(a) En conservant les notations de la question précédente, montrer que $e^{rt_0} = \dfrac{K}{n_0} - 1$.

(b) Déterminer une primitive de la fonction n sur $[0, +\infty[$ (en vérifiant que cette fonction est bien définie, puisqu'elle devrait faire intervenir un ln).

(c) On appelle **valeur moyenne** prise par une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

Montrer que la valeur moyenne de la fonction n sur l'intervalle $[0, 2t_0]$ est égale à $\dfrac{K}{2}$.

(d) En notant $n_1 = n(t_0)$, montrer que $r = \dfrac{1}{t_0} \ln\left(\dfrac{\frac{1}{n_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{K}}\right)$.

(e) En conservant les valeurs $n_0 = 1$ et $K = 4$, quelle influence aura une modification du paramètre r sur l'allure de la courbe de la fonction n ?