Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

7 octobre 2023

Exercice 1

1. L'équation n'a de sens que si $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Dans ce cas, on peut regrouper les ln et passer à l'exponentielle pour obtenir l'équation équivalente $(x+2)(2x-1) = x+1$, soit $2x^2 + 3x - 2 = x + 1$, ou encore $2x^2 + 2x - 3 = 0$. Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 4 + 24 = 28 = 4 \times 7$, et pour racines $x_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{7}}{4} = -\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$, valeur strictement inférieure à $\dfrac{1}{2}$ et donc à éliminer, et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$, qui est donc l'unique solution de l'équation initiale : $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right\}$.
2. On ne peut pas échapper ici à un joli tableau (on note A le membre de gauche de l'inégalité) :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\lvert 1-2x \rvert$		$1-2x$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$\lvert x+2 \rvert$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$		$x+2$	
$\lvert 2x-4 \rvert$		$4-2x$		$4-2x$		$4-2x$	0	$2x-4$	
A		$-x-5$		$x-1$		$5x-3$		$x+5$	

Il ne reste plus qu'à résoudre sur chaque intervalle :

- sur $]-\infty, -2]$, $-x-5 < 1$ donne $x > -6$, on conserve donc l'intervalle $]-6, -2]$.
- sur $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$, $x - 1 < 1$ donne $x < 2$, on conserve tout l'intervalle.
- sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $5x - 3 < 1$ donne $x < \frac{4}{5}$, on conserve l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right[$.
- enfin, sur $[2, +\infty[$, $x + 5 < 1$ donne $x < -4$, qui n'est jamais vérifié.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-6, \frac{4}{5}\right[$.

3. On écrit tout avec des exponentielles : $\frac{3}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \geqslant 3$, ou encore, après multiplication par e^x qui est toujours positif, $e^{2x} - 3e^x + 2 \geqslant 0$. On pose alors $X = e^x$ et on étudie le signe du trinôme $X^2 - 3X + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et pour racines $X_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ (oui, les racines étaient évidentes). Le trinôme est positif si $X \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$, donc $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup [\ln(2), +\infty[$.
4. Pour que l'équation ait un sens, il faut avoir $x^3 - 2x^2 + 2x + 5 \geqslant 0$. le membre de gauche a pour racine évidente -1 : $(-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 5 = -1 - 2 - 2 + 5 = 0$. On peut donc le factoriser sous la forme $(x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c$. Par identification des coefficients, $a = 1$, $b + a = -2$ donc $b = -3$ et $c + b = 2$ donc

$c = 5$ (cohérent avec le coefficient constant). Le trinôme $x^2 - 3x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 20 < 0$, il est toujours positif. On en déduit que notre équation a un sens si $x \in [-1, +\infty[$. Ça tombe particulièrement bien, on peut alors tout élever au carré pour obtenir l'équation équivalente $x^3 - 2x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2$. Exploitons la factorisation précédente : $(x+1)(x^2 - 3x + 5) - (x+1)^2 = 0$ donne $(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0$, soit $(x+1)(x-2)^2 = 0$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1, 2\}$.

5. Cette équation ne peut avoir de sens que si $x > 0$, et on peut alors la mettre sous la forme exponentielle $e^{x\ln(x)} = e^{(x+1)\ln(\sqrt{x})}$, soit $x\ln(x) = \dfrac{x+1}{2}\ln(x)$. Cette équation est vérifiée si $\ln(x) = 0$, donc si $x = 1$, ou si $x = \dfrac{x+1}{2}$, soit $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne à nouveau $x = 1$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1\}$.

Exercice 2

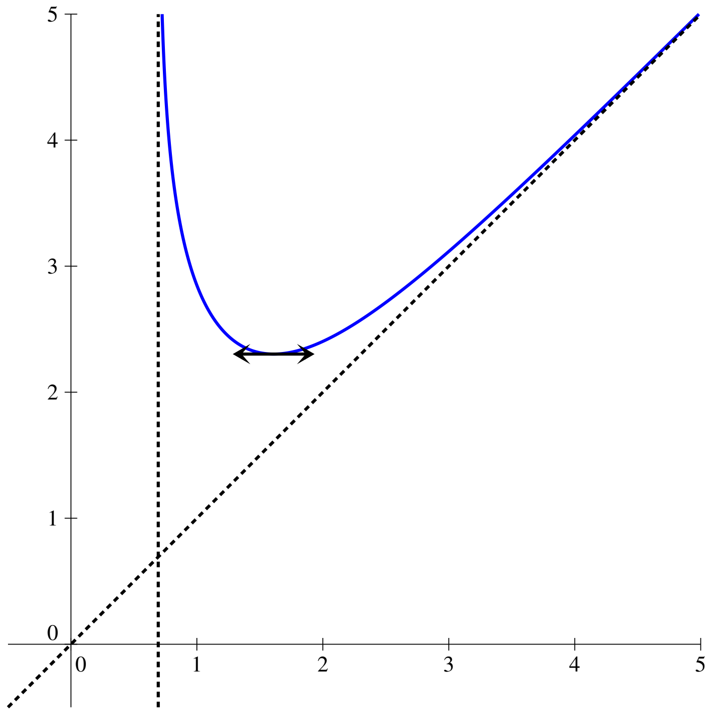
1. Pour que f soit définie, on doit avoir $\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} > 0$. Comme le numérateur de cette fraction est lui-même toujours strictement positif, on est donc ramenés à la vérification de la condition $e^x - 2 > 0$, soit $x > \ln(2)$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f =]\ln(2), +\infty[$.
2. Calculons donc $f(\ln(3)) = \ln\left(\dfrac{e^{2\ln(3)}+5}{e^{\ln(3)}-2}\right) = \ln\left(\dfrac{9+5}{3-2}\right) = \ln(14)$, puis $f(2\ln(3)) = \ln\left(\dfrac{e^{4\ln(3)}+5}{e^{2\ln(3)}-2}\right) = \ln\left(\dfrac{81+5}{9-2}\right) = \ln\left(\dfrac{86}{7}\right)$. Comme $\dfrac{86}{7} < 14$ (puisque, comme chacun d'entre vous le sait par coeur depuis le primaire, $14 \times 7 = 98$), c'est donc $f(\ln(3))$ qui est un peu plus grande.
3. On peut évidemment « simplifier les ln » : les antécédents de $\ln(2)$ sont les solutions de l'équation $\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} = 2$, ou encore $e^{2x} + 5 = 2e^x - 10$. On effectue le changement de variable $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 2X + 15 = 0$, qui n'a aucune solution réelle puisque son discriminant vaut $\Delta = 4 - 60 < 0$. Le nombre $\ln(2)$ n'a donc pas d'antécédent par f, ce qui est cohérent avec les variations obtenues plus bas.
   Pour les antécédents de $4\ln(2) = \ln(2^4) = \ln(16)$, même méthode : on se ramène à $e^{2x} + 5 = 16e^x - 32$, puis via le changement de variable $X = e^x$, à l'équation du second degré $X^2 - 16X + 37 = 0$. Cette dernière a pour discriminant $\Delta = 256 - 148 = 108 = 36 \times 3$, et admet donc deux racines réelles, $X_1 = \dfrac{16 - 6\sqrt{3}}{2} = 8 - 3\sqrt{3}$, et $X_2 = 8 + 3\sqrt{3}$. Ces deux nombres étant strictement positifs, $4\ln(2)$ a deux antécédents égaux à $\ln(8 - 3\sqrt{3})$ et $\ln(8 + 3\sqrt{3})$ (qui appartiennent bien tous les deux à $\mathcal{D}_f$).
4. Du côté de $\ln(2)$, pas de difficulté : $\lim\limits_{x\to\ln(2)} e^{2x}+5 = 9$ et $\lim\limits_{x\to\ln(2)} e^x-2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to\ln(2)} \dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to\ln(2)} f(x) = +\infty$. C'est un peu plus délicat en $+\infty$, on peut par exemple factoriser par e^x au numérateur et au dénominateur de la fraction : $\dfrac{e^{2x}+5}{e^x-2} = \dfrac{e^x(e^x + 5e^{-x})}{e^x(1 - 2e^{-x})} = \dfrac{e^x + 5e^{-x}}{1 - 2e^{-x}}$, et il n'y a plus de forme indéterminée : la fraction tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
5. On peut reprendre le calcul précédent et aller encore un peu plus loin dans la factorisation : $f(x) = \ln(e^x + 5e^{-x}) - \ln(1 - 2e^{-x}) = \ln(e^x(1 + 5e^{-2x})) - \ln(1 - 2e^{-x}) = x + \ln(1 + 5e^{-2x}) - \ln(1 - 2e^{-x})$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + 5e^{-2x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - 2e^{-x}) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$, ce qui prouve bien que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Pour

la position relative, il faut étudier le signe de $\ln(1+5e^{-2x}) - \ln(1-2e^{-x})$, ce qui est en fait évident : $1+5e^{-2x} > 1$, donc $\ln(1+5e^{-2x}) > 0$, et $1-2e^{-x} < 1$, donc $\ln(1-2e^{-x}) < 0$. La différence est donc toujours positive, ce qui prouve que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote.

6. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et en séparant les ln (on peut le faire puisque tout est strictement positif), $f(x) = \ln(e^{2x}+5) - \ln(e^x - 2)$, donc $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+5} - \dfrac{e^x}{e^x-2} = \dfrac{2e^{3x} - 4e^{2x} - e^{3x} - 5e^x}{(e^{2x}+5)(e^x-2)} = \dfrac{e^{3x} - 4e^{2x} - 5e^x}{(e^{2x}+5)(e^x-2)}$. Le dénominateur de cette dérivée étant toujours positif, reste à factoriser son numérateur, ce qu'on va faire en posant $X = e^x$. Ledit numérateur s'écrit alors $X^3 - 4X^2 - 5X = X(X^2 - 4X - 5)$, et la parenthèse a pour discriminant $\Delta = 16 + 20 = 36$, et pour racines $X_1 = \dfrac{4-6}{2} = -1$, et $X_2 = \dfrac{4+6}{2} = 5$. On peut donc le factoriser sous la forme $X(X+1)(X-5)$, et $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)(e^x-5)}{(e^{2x}+5)(e^x-2)}$. Cette dérivée est du signe de $e^x - 5$, et s'annule donc une seule fois, pour $x = \ln(5)$ (valeur rassurante quand on a déjà lu la question suivante). Le minimum correspondant vaut $f(\ln(5)) = \ln\left(\dfrac{e^{2\ln(5)}+5}{e^{\ln(5)}-2}\right) = \ln\left(\dfrac{25+5}{5-2}\right) = \ln(10)$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$\ln(2)$		$\ln(5)$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(10)$	$\nearrow$	$+\infty$

7. On trace bien sûr les deux asymptotes (verticale et oblique) en plus de la courbe, et on constate que $\ln(10) = \ln(2) + \ln(5) \simeq 2.3$ pour bien placer le minimum :



Exercice 3

1. La fonction g n'est pas définie si $x^2 - x - 2 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 1 + 9$, et admettant pour solutions $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. On a donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$.
2. Pour les antécédents de 1, il faut résoudre l'équation $|x + 2| = |x^2 - x - 2|$, ce qui donne classiquement deux possibilités : soit $-x-2 = x^2-x-2$, donc $x = 0$, soit $x+2 = x^2-x-2$, donc $x^2 - 2x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$. Le réel 1 a donc trois antécédents par f : $1 - \sqrt{5}$, 0 et $1 + \sqrt{5}$. Pour -1, on ne fait bien sûr aucun calcul, il ne peut pas avoir d'antécédents puisque f ne prend que des valeurs positives. Pour 3, on utilise la même méthode que pour 1 : soit $x+2 = 3x^2-3x-6$, donc $3x^2-4x-8 = 0$, discriminant $\Delta = 16+96 = 112 = 7\times 16$, racines $x_3 = \dfrac{4-\sqrt{116}}{6} = \dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}$ et $x_4 = \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$, soit $-x-2 = 3x^2-3x-6$, donc $3x^2-2x-4 = 0$, discriminant $\Delta = 4+48 = 52 = 4\times 13$, racines $x_5 = \dfrac{2-\sqrt{52}}{6} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$ et $x_6 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$. Le réel 3 a donc quatre antécédents sublimes que j'ai souvent très peu envie de recopier.
3. On se ramène (en multipliant tout par le dénominateur qui est évidemment toujours positif) à l'inéquation $|x + 2| - |x^2 - x - 2| \geqslant 0$, et on peut par exemple faire un tableau :

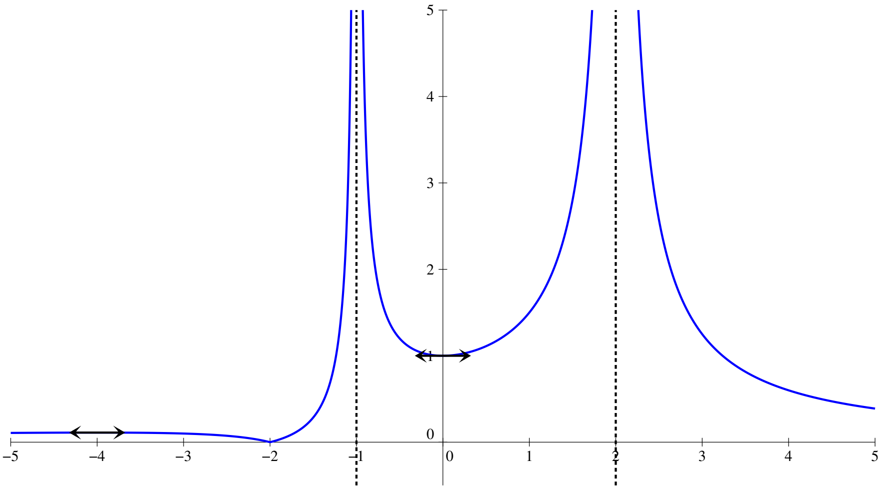
x	$-\infty \qquad -2$	-1	2	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2 \quad 0$	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x^2-x-2\rvert$	x^2-x-2	$x^2-x-2 \quad 0$	$-x^2+x+2 \quad 0$	x^2-x-2
$\lvert x+2\rvert - \lvert x^2-x-2\rvert$	$-x^2$	$-x^2+2x+4$	x^2	$-x^2+2x+4$

L'inéquation n'est jamais vérifiée sur $]-\infty, -2]$, et elle l'est toujours sur $]-1, 2[$. Sur les deux intervalles restants, $-x^2 + 2x + 4$ est positif entre ses racines, donc sur $[1 - \sqrt{5}, -1[$ (le nombre $1 - \sqrt{5}$ étant compris entre -2 et -1) et sur $]2, 1 + \sqrt{5}]$. Conclusion : $\mathcal{S} = [1-\sqrt{5}, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, 1+\sqrt{5}] = [1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]\backslash\{-1, 2\}$. Remarquez qu'on n'a bien sûr pas besoin de recalculer les solutions des équations du second degré qui ont déjà été traitée dans la question précédente.

4. Le quotient $\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ a pour limite 0 en $\pm\infty$ (quotient des termes de plus haut degré), donc f aussi. En -1 et en 2, le dénominateur s'annule mais pas le numérateur, ce qui assure que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ (inutile de préciser les signes de la limite dans chaque cas, puisque la valeur absolue va de toute façon tout rendre positif).
5. Posons $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ et étudions les variations et le signe de h. La fonction h est dérivable sur $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_g$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{x^2-x-2-(2x-1)(x+2)}{(x-2-x-2)^2} = \dfrac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{x(-x-4)}{(x^2-x-2)^2}$. On calcule $h(0) = \dfrac{2}{-2} = -1$ et $h(-4) = \dfrac{-2}{18} = -\dfrac{1}{9}$. De plus, la fonction h change de signe en -2 (changement de signe du numérateur), -1 et 2 (changement de signe du dénominateur), elle est négative sur $]-\infty, -2]$ et sur $]-1, 2[$ et positive sur $[-2, -1[$ et sur $]2, +\infty[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$+\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
g	0	↘	$-\frac{1}{9}$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
f	0	↗	$\frac{1}{9}$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

6. Et une deuxième courbe (attention à bien faire une « pointe » en -2 et pas une tangente horizontale, la fonction n'y est pas dérivable) :



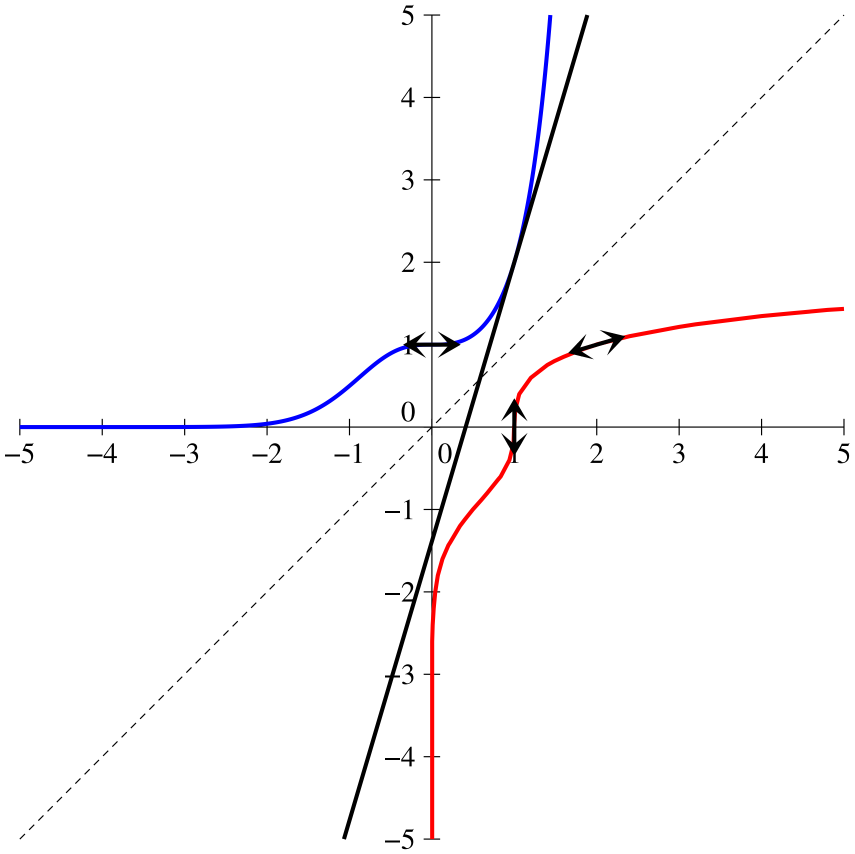
Exercice 4

1. On s'empresse bien sûr d'écrire f sous forme exponentielle : $f(x) = e^{x\ln(x^2+1)}$. Comme x^2+1 est toujours strictement positif, on a simplement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Sous forme exponenentielle, il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \left(\ln(x^2+1) + x \times \dfrac{2x}{x^2+1}\right) e^{x\ln(x^2+1)} = \left(\ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}\right) e^{x\ln(x^2+1)}$. Cette dérivée a priori peu engageante est en fait fort simple à gérer puisque tout y est positif (y compris le $\ln(x^2+1)$ puisqu'on a toujours $x^2+1 \geqslant 1$). La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais notons tout de même que la dérivée s'annule pour $x = 0$ (les deux termes de la parenthèse étant alors nuls).
3. On a bien sûr $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$. Aucune forme indéterminée à l'horizon : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
4. On a déjà signalé que $f'(0) = 0$, et $f(0) = e^0 = 1$, donc l'équation de la tangente en 0 est simplement $y = 1$ (c'est une tangente horizontale). C'est plus intéressant en 1 : $f(1) = e^{\ln(2)} = 2$, et $f'(1) = \left(\ln(2) + \dfrac{2}{2}\right) f(1) = 2\ln(2) + 2$, ce qui donne pour équation $y = (2\ln(2)+2)(x-1) + 2 = (2\ln(2)+2)x - 2\ln(2)$.

5. Puisque f est continue et strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers son intervalle image $]0, +\infty[$. La réciproque f^{-1} existe donc, et elle est elle-même définie sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante. Plus précisément, on a le passionnant tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
f^{-1}	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. La fonction f^{-1} n'est pas dérivable partout puisque f' s'annule en 0. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que f^{-1} n'est pas dérivable en 1 (plus précisément, sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(1, 0)$). Comme $f(1) = 2$, on sait que $f^{-1}(2) = 1$, et que $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2\ln(2) + 2}$.
7. On utilise bien sûr la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (en pointillés ci-dessous) pour tracer la courbe représentative de f^{-1}. J'ai également indiqué sur cette courbe la tangente en 2, qui a d'après la question précédente pour pente $\dfrac{1}{2\ln(2) + 2} \simeq \dfrac{1}{3.4} \simeq 0.3$:



Exercice 5

1. Allons-y pour les trois vérifications d'usage :

   - la relation $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive : en effet, $A\mathcal{R}A$ affirme qu'il existe un majorant de A appartenant à A, autrement dit qu'il existe un maximum pour l'ensemble A. Ce n'est

évidemment pas le cas de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$: par exemple $[0, +\infty[$ ou même $[0, 1[$ ne sont pas en relation avec eux-mêmes.
  - elle n'est pas non plus antisymétrique : si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$, alors il existe un élément de B majorant A, et un élément de A majorant B. Les deux éléments en question sont alors nécessairement égaux, mais ça ne signifie absolument pas que $A = B$. Par exemple, $A = [0, 2]$ et $B = [1, 2]$ sont en relation dans les deux sens (2 étant le maximum commun des deux ensembles).
  - par contre, $\mathcal{R}$ est transitive : si $B\mathcal{R}C$, il existe un élément z majorant B, donc z est plus grand que l'élément y de B qui majore A (à cause de l'hypothèse $A\mathcal{R}B$). Il majore donc A, ce qui prouve que $A\mathcal{R}C$.

   La relation $\mathcal{R}$ n'est pas du tout une relation d'ordre.

2. Même chose, on vérifie les trois propriétés :

   - la relation $\mathcal{S}$ n'est absolument pas réflexive. En fait, dès que A contient (au moins) deux éléments, A n'est pas en relation avec lui-même (puisqu'un de ses éléments est strictement inférieur à l'autre.
   - elle est par contre antisymétrique : si $A\mathcal{S}B$ et $B\mathcal{S}A$, tous les éléments de B sont plus petits et plus grands que tous ceux de A, ce qui chaque élément de B est égal à chaque élément de A. En fait, cela ne peut se produire que si A et B ne contiennent qu'un seul élément chacun, et que cet élément est égal. On a donc bien $A = B$.
   - elle est aussi assez clairement transitive : si tous les éléments de A sont plus petits que ceux de B, qui sont eux-même plus petits que ceux de C, alors les éléments de A sont plus petits que ceux de C par transitivité de l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

   Tout cela ne suffit toujours pas à faire de $\mathcal{S}$ une relation d'ordre.

3. Cette nouvelle relation est trivialement réflexive, et elle reste transitive puisque, si $A \prec B$ et $B \prec C$, on a évidemment $A \prec C$ dans les cas où $A = B$ ou $B = C$, et on a déjà prouvé à la question précédente que c'était aussi le cas si les trois ensembles sont deux à deux distincts (c'est la transitivité de la relation $\mathcal{S}$). Reste à vérifier la réflexivité : si $A \prec B$ et $B \prec A$ alors que $A \neq B$, on est ramenés à l'antisymétrie de la relation $\mathcal{S}$, et on a déjà vu que dans ce cas on avait nécessairement $A = B$ (autrement dit, l'hypothèse faite ne peut pas se produire). La relation $\prec$ est donc bien antisymétrique. C'est une relation d'ordre, mais elle n'est absolumen pas totale. Par exemple $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$ ne sont pas comparables par cette relation (ils ne sont pas égaux, et il existe des éléments dans chaque ensemble qui sont strictement supérieurs à certains éléments de l'autre ensemble).

4. Si A est le maximum de E pour la relation $\prec$, alors en particulier $\{x\} \prec A$ pour tout réel x. Cela signifie que soit $A = \{x\}$ (mais c'est absurde car dans ce cas $\{x+1\}$ n'est pas en relation avec A), soit A ne contient que des éléments plus grands que x. Comme cela doit être vérifié pour toutes les valeurs de x, A ne peut contenir aucun élément. Mais comme l'ensemble vide n'appartient pas à E, aucun élément de E ne peut donc être maximum. Un raisonnement symétrique permet de prouver qu'il n'y a pas non plus de minimum.

5. Oui, F est majoré, par exemple par l'intervalle $[42, 42 \times 42]$. Pour qu'un ensemble A majore F, il doit contenir des éléments qui sont tous plus grands que tous les éléments de chacun des trois intervalles de F (A ne peut pas être égal à un de ces trois intervalles, qui ne majorent pas les deux autres). Autrement dit, il doit simplement contenir des éléments tous supérieurs ou égaux à 3. Autrement dit, A majore F si et seulement si $A \subset [3, +\infty[$ (et A non vide, bien entendu). Parmi tous ces majorants, il en existe bien un qui est le « plus petit » (au sens de la relation $\prec$), c'est simplement $A = \{3\}$. En effet, A est certainement en relation avec tout sous-ensemble ne contenant que des éléments supérieurs ou égaux à 3.

6. Déjà, A admet une borne supérieure puisqu'il est majoré par les éléments de B. En notant cette borne supérieure M, on peut même dire que $\forall y \in B$, $M \leqslant y$ (puisque par hypothèse, y

est un majorant de A). De façon complètement symétrique, B admet une borne inférieure m qui vérifie $\forall x \in A$, $x \leqslant m$. Supposons que $M < m$. Posons alors $\varepsilon = \dfrac{m - M}{4}$, et appliquons l'hypothèse de l'énoncé : il existe deux éléments a et b dans nos ensembles tels que $b - a \leqslant \varepsilon$. En même temps, on a $b \geqslant m$ et $a \leqslant M$ (par définition des bornes inférieure et supérieure), donc $b - a \geqslant m - M = 4\varepsilon$. C'est manifestement complètement absurde, donc on a nécessairement $M \geqslant m$. Supposons inversement que $M > m$, et notons dans ce cas $\varepsilon = \dfrac{M - m}{4}$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément $a \in A$ tel que $M - \varepsilon \leqslant a \leqslant M$. De même, il existe un élément b tel que $m \leqslant b \leqslant m + \varepsilon$. Sauf qu'avec la valeur de ε choisie, $m + \varepsilon < M - \varepsilon$. On aurait donc $b < a$, ce qui contredit les hypothèses initiales. On a donc $m \leqslant M$, et on peut maintenant conclure que $M = m$.