Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 2

MPSI Lycée Camille Jullian

7 octobre 2023

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(x+2) + \ln(2x-1) = \ln(x+1)$.
2. $|1-2x| + |x+2| - |2x-4| < 1$.
3. $3\,\text{ch}(x) - \text{sh}(x) \geqslant 3$.
4. $\sqrt{x^3 - 2x^2 + 2x + 5} = x + 1$.
5. $x^x = (\sqrt{x})^{x+1}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+5}{e^x - 2}\right)$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les images par f de $\ln(3)$ et de $2\ln(3)$. Laquelle des deux est la plus grande ?
3. Calculer les antécédents (éventuels) par f des nombres $\ln(2)$ et $4\ln(2)$.
4. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
5. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote ?
6. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et en donner une expression factorisée. En déduire le tableau de variations complet de f.
7. Tracer une allure de $\mathcal{C}_f$. On donne la valeur approchée $\ln(5) \simeq 1.6$.

Exercice 3

On considère dans tout cet exercice la fonction g définie par $g(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2 - x - 2}\right|$.

1. Préciser le domaine de définition de g.
2. Déterminer les antécédents éventuels par la fonction g des réels 1, -1 et 3.
3. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant 1$.
4. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
5. Étudier les variations de g, et dresser son tableau de variations complet.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction g.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2+1)^x$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Étudier les variations de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0, ainsi qu'en son point d'abscisse 1.
5. Justifier que f admet une réciproque f^{-1}, en précisant le domaine de définition et le tableau de variations de celle-ci.
6. La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur tout son domaine de définition ? Préciser la valeur de $(f^{-1})'(2)$.
7. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes représentatives de f et de f^{-1}, ainsi que de toutes les tangentes calculées en cours d'exercice.

Exercice 5

On pose dans cet exercice $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\{\emptyset\}$ (ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, sauf l'ensemble vide).

1. On définit sur E une relation $\mathcal{R}$ par $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $\exists y \in B, \forall x \in A, x \leqslant y$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur E (on précisera lesquelles des trois propriétés définissant une relation d'ordre sont vérifiées) ?
2. On définit sur E une deuxième relation $\mathcal{S}$ par $A\mathcal{S}B$ si et seulement si $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leqslant y$. Cette nouvelle relation est-elle une relation d'ordre sur E (on précisera lesquelles des trois propriétés définissant une relation d'ordre sont vérifiées) ?
3. On définit enfin une troisième relation $\prec$ par $A \prec B$ si $A = B$ **ou** $\forall (x, y) \in A \times B$, $x \leqslant y$. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur E. Cette relation est-elle totale ?
4. L'ensemble E admet-il un maximum pour la relation $\prec$? Un minimum ?
5. On note F l'ensemble constitué des trois intervalles $]0,2[$, $]1,3[$ et $[1,2]$. L'ensemble F est-il majoré pour la relation $\prec$? Si oui, à quelle condition un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est-il un majorant de F ? L'ensemble F admet-il une borne supérieure pour la relation $\prec$?
6. Deux éléments de E sont **adjacents** si $\forall (x, y) \in A \times B$, $x \leqslant y$, **et** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (x, y) \in A \times B$, $y - x \leqslant \varepsilon$. Montrer qu'on a alors $\sup(A) = \inf(B)$.