Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

16 septembre 2023

Exercice 1

1. On peut tout multiplier par e^x (qui ne s'annule) pour obtenir l'équation équivalente $e^{2x} + e^x - \frac{3}{4} = 0$, puis on s'empresse d'effectuer le changement de variable $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 + X - \frac{3}{4} = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 3 = 4$, et a donc pour racines $X_1 = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$. La racine X_1 étant incompatible avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, donc $\mathcal{S} = \{-\ln(2)\}$.

2. Commençons par préciser que l'inéquation ne peut avoir de sens que si $x^2 + 2x > 0$, soit $x(x+2) > 0$, ce qui nous force à résoudre sur $D =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ (petit tableau de signe si c'est vraiment nécessaire). Sur cet ensemble, l'inéquation est équivalente à $x^2 + 2x < 3$, donc $x^2 + 2x - 3 < 0$. Le membre de gauche a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 + 16$ et pour racines $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$. Il est négatif entre ces racines, ce qui donne (vu l'ensemble de résolution choisi) $\mathcal{S} = [-3, -2[\cup]0, 1]$.

3. Encore une inéquation qui nécessite de préciser un ensemble de résolution : $x^2 - 5x + 4$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$ et pour racines $x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$. On peut donc résoudre l'inéquation sur l'ensemble $D =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$. On peut maintenant distinguer deux cas :
   - si $x < -2$, le membre de droite $x + 2$ est strictement négatif alors que celui de gauche est positif, l'inéquation ne sera donc jamais vérifiée.
   - si $x \geqslant -2$ (et $x \in D$, bien entendu), et **seulement dans ce cas**, on peut élever au carré les deux membres de l'inégalité pour obtenir l'inéquation équivalente (tout est positif) $x^2 - 5x + 4 \leqslant (x+2)^2$, soit $x^2 - 5x + 4 \leqslant x^2 + 4x + 4$, ou encore $0 \leqslant 9x$. Bon, pas trop dur à résoudre, on conserve donc tous les réels positifs appartenant à D.

   Conclusion : $\mathcal{S} = [0, 1] \cup [4, +\infty[$.

4. On pose bien sûr $X = x^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2 - 3X - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$ et pour racines $X_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{3+5}{4} = 2$. En éliminant la racine négative incompatible avec notre changement de variables, on ne conserve que la possibilité $x^2 = 2$, donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

5. L'inéquation est équivalente à $\frac{x - 1 - 2x^2 - 2x + 4}{x^2 + x - 2} < 0$, soit $\frac{-2x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} < 0$. On va ensuite faire un tableau de signes : le numérateur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et pour racines $x_1 = \frac{1+5}{-4} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{1-5}{-4} = 1$ (il sera positif entre ces racines puisque son coefficient dominant est négatif), le dénominateur a pour disriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et pour racines $x_3 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_4 = \frac{-1+3}{2} = 1$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2 - x + 3$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup \left]-\frac{3}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 2

1. Réciproque : « Je vais avoir 20 au devoir, donc je suis un dieu (ou une déesse) des mathématiques », ou éventuellement « Je ne suis pas un dieu (ou une déesse) des maths, donc je ne vais pas avoir 20 à ce devoir ».
   Contraposée : « Je ne vais pas avoir 20 à ce devoir, donc je ne suis pas un dieu (ou une déesse) des maths ».
2. Il existe à chaque fois plusieurs possibilités, je n'en donne qu'une qui marche :
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \neq x, f(y) \neq f(x)$.
   (b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
   (c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$.
   (d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \neq x, f(y) \neq 0$.
3. (a) $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ (c'est évident) mais la réciproque est fausse, par exemple $2^2 = (-2)^2$ et pourtant $2 \neq -2$.
   (b) $x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$, l'implication de la droite vers la gauche est évidente, mais cette fois-ci la réciproque est également vraie (car la fonction cube est bijective, ou si on préfère la racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier). Ce serait par contre faux dans $\mathbb{C}$.
   (c) $x^2 < x \Rightarrow x < 1$. En effet, les réels vérifiant $x^2 < x$ sont ceux appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, ils sont donc tous strictement inférieurs à 1, mais la réciproque est fausse (par exemple $x = -2 < 1$ et pourtant $(-2)^2 > -2$).
   (d) Les deux équations sont en fait très faciles à résoudre : on a $|x+y| = 0$ si (et seulement si) $x+y = 0$, donc si x et y sont opposés (ce qui fait bien sûr une grosse infinité de possibilités). Par contre, $|x| + |y| = 0$ ne peut se produire que si $x = y = 0$ (une valeur absolue est toujours positive, et seul 0 a une valeur absolue nulle). On a donc $|x+y| = 0 \Leftarrow |x|+|y| = 0$, avec une réciproque fausse.
   (e) C'est très similaire au cas précédent : $x^2 + y^2 = 0$ ne peut se produire que si chacun des deux carrés est nul (ils sont tous les deux positifs), donc si $x = y = 0$. La réciproque étant évident, on a cette fois-ci équivalence : $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
4. (a) Cet énoncé est faux (il reviendrait à die que la fonction carré est majorée sur $\mathbb{R}$). Si on prend un réel x quelconque, on peut toujours trouver un carré plus grand que lui, par exemple $(|x| + 1)^2$ (je vous laisse vérifier que ça marche dans tous les cas).
   (b) Cet énoncé prétend exactement qu'il existe un entier naturel n dont tous les entiers naturels sont des multiples. C'est vrai, et il est même unique, c'est $n = 1$.
   (c) Cette fois-ci, l'énoncé affirme l'existence et lunicité d'un entier naturel qui est un multiple de tous les entiers. Il en existe bel et bien un, c'est $n = 0$. Et c'est le seul, car si $n \neq 0$, n ne peut par exemple pas être un multiple de $2n$. La propriété est donc vraie.

Exercice 3

1. On a bien entendu $\mathcal{D}_{f_n} =]0, +\infty[$ à cause de la présence du ln. Sans aucune difficulté, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et on se contente d'appliquer le résultat de croissance comparée rappelé par l'énoncé pour affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$.

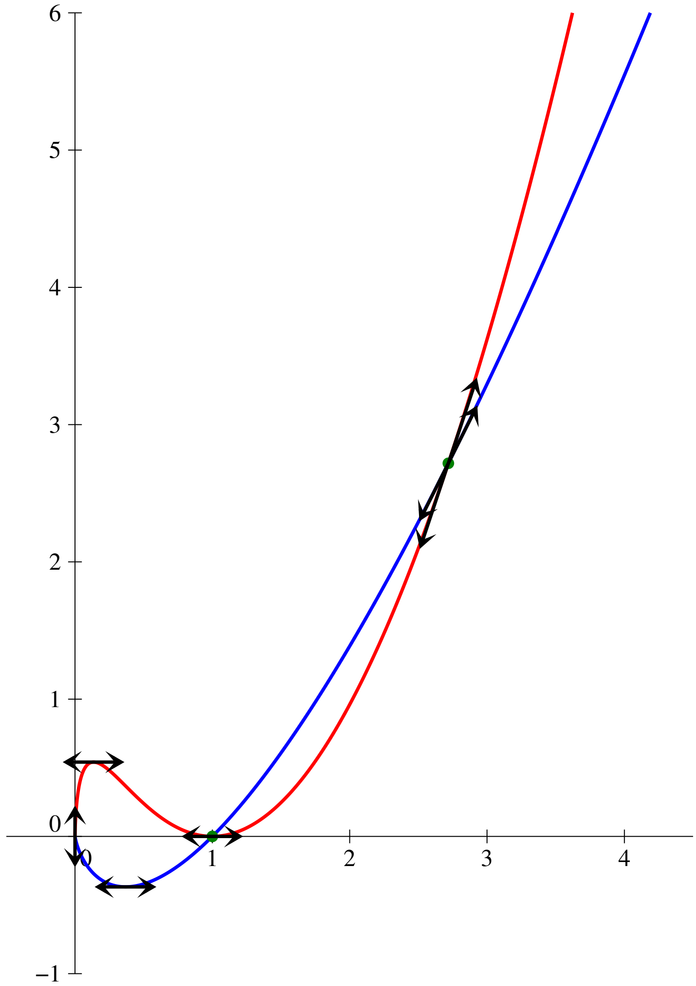
2. Les deux fonctions sont évidemment dérivables sur $]0,+\infty[$. On calcule $f_1'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln(x) = -1$, donc pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. La fonction admettra à cette abscisse un minimum de valeur $f_1\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

On dérive maintenant la deuxième fonction : $f_2'(x) = (\ln(x))^2 + x \times 2\dfrac{\ln(x)}{x} = \ln^2(x) + 2\ln(x) = \ln(x)(\ln(x)+2)$. Cette dérivée s'annule donc pour $x = 1$ et pour $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$, et sera négative entre ses deux valeurs d'annulation (en posant $X = \ln(x)$, on reconnait un trinôme du second degré). On calcule donc $f_2(1) = 0$ (facile !) et $f_2\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{1}{e^2} \times (-2)^2 = \dfrac{4}{e^2}$. On peut maintenant faire notre tableau :

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. On applique bien sûr la formule habituelle. Pour cela, on calcule $f_1(e) = e \times 1 = e$, $f_2(e) = e$, $f_1'(e) = \ln(e) + 1 = 2$ et $f_2'(e) = 3$. La tangente à $\mathcal{C}_1$ aura donc pour équation $y = 2(x-e)+e = 2x - e$ et celle à $\mathcal{C}_3$ aura pour équation $y = 3(x-e)+e = 3x - 2e$.
4. On a directement $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1'(x) = -\infty$, et en reprenant la forme factorisée de f_2', on obtient tout aussi rapidement $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2'(x) = +\infty$ (les deux facteurs tendent vers $-\infty$). Les deux courbes deviennent donc de plus en plus verticales au voisinage de 0 (techniquement, si on avait procédé à un prolongement par continuité des deux fonctions en 0, les deux courbes y admettraient une tangente verticale).
5. On calcule donc $f_2(x) - f_1(x) = x\ln^2(x) - x\ln(x) = x\ln(x)(\ln(x)-1)$. Le facteur x étant toujours positif, le signe de cette différence dépend des deux facteurs restants. Pas vraiment besoin de faire un tableau de signe, les deux courbes se coupent pour $x = 1$ (à ordonnée nulle) et pour $x = e$ (à ordonnée e, calculs déjà faits auparavant), et $\mathcal{C}_2$ est en-dessous de $\mathcal{C}_1$ sur l'intervalle $[1,e]$, au-dessus sur $]0,1]$ et sur $[e,+\infty[$.
6. On place bien sûr les différents points d'intérêt (extrema, intersection des courbes), mais aussi les tangentes calculées en question 3, et tant qu'on y est les tangentes verticales à l'origine :



7. Calculons donc plus généralement $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x\ln^{n+1}(x) - x\ln^n(x) = x\ln^n(x)(\ln(x) - 1)$. Comme tout à l'heure, le facteur x est toujours positif, et les deux courbes se coupent toujours aux deux mêmes points. IL y a par compte une petite subtilié pour le signe du facteur $\ln^n(x)$: si n est un entier pair, il est toujours positif. Dans ce cas, $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur tout l'intervalle $]0, e]$ (bien que les courbes se coupent en plein milieu de cet intervalle), et en-dessous uniquement sur $[e, +\infty[$. Si n est impair, on a exactement les mêmes positions relatives que celle étudiées pour $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ à la question 5.
8. Une dernière étude de signe : $f_{n+2}(x) - f_n(x) = x\ln^{n+2}(x) - x\ln^n(x) = x\ln^n(x)(\ln^2(x) - 1)$. Les deux premiers facteurs sont de signe constant (mais celui de $\ln^n(x)$ dépend de la parité de n, il faudra y faire attention). Le dernier facteur s'annule quand $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = -1$. Sur l'intervalle d'étude imposé, on ne conserve que $x = \dfrac{1}{e}$ comme abscisse de point d'intersection. On a donc $\mathcal{C}_n$ au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ puis en-dessous sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ quand n est pair, avec un point d'intersection d'ordonnée $f_n\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \times (-1)^n = \dfrac{1}{e}$. Si n est impair, les positions relatives sont exactement inversées, avec cette fois-ci un point d'intersection d'ordonnée $-\dfrac{1}{e}$.
9. Toutes les fonctions f_n sont bien sûr dérivables, et $f_n'(x) = \ln^n(x) + x \times n\dfrac{\ln^{n-1}(x)}{x} = \ln^n(x) + n\ln^{n-1}(x) = \ln^{n-1}(x)(\ln(x) + n)$. La dérivée s'annule toujours en 1 (sauf dans le cas $n = 1$ déjà traité plus haut) et en e^{-n}, où f_n a pour valeur $f_n\left(\dfrac{1}{e^n}\right) = \dfrac{1}{e^n} \times (-n)^n = \left(-\dfrac{n}{e}\right)^n$ (dont

le signe dépend de la parité de n). Si n est impair, la dérivée ne change pas de signe en 1 (puisque $\ln^{n-1}(x)$ est toujours positif), si n est pair, on a deux changements de signe. Plus simplement on peut faire le tableau suivant quand n est impair :

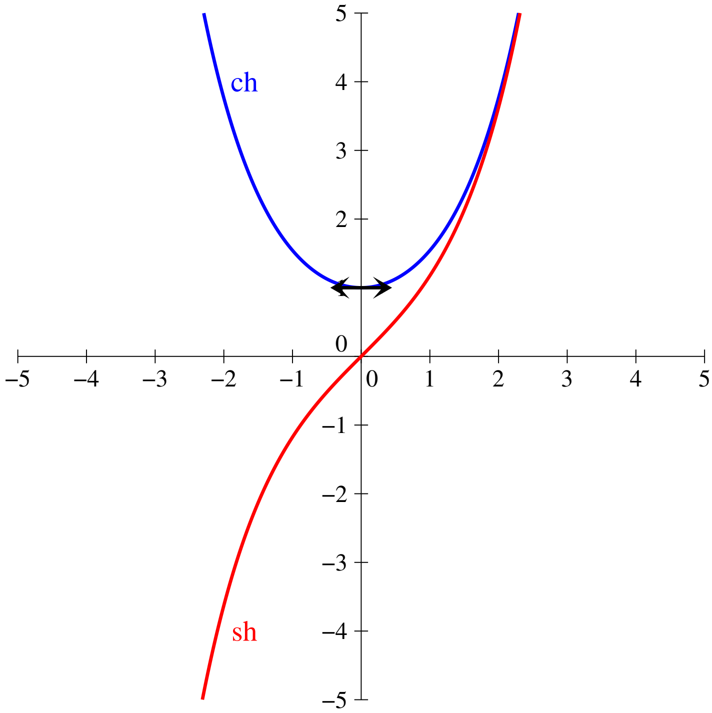
x	0		$\frac{1}{e^n}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-(\frac{n}{e})^n$	$\nearrow$	$+\infty$

Et dans le cas où l'entier n est pair :

x	0		$\frac{1}{e^n}$		1		$+\infty$
f_2	0	$\nearrow$	$(\frac{n}{e})^n$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4

1. Les deux fonctions sont bien sûr définies sur $\mathbb{R}$. La fonction ch est immédiatement positive puisque somme de deux exponentielles. Par contre, $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$ si $e^x \geqslant e^{-x}$, donc si $x \geqslant -x$. Autrement dit, $\mathrm{sh}(x)$ est simplement du signe de x, positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, 0]$. Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$. Puisqu'on vient de donner le signe de $\mathrm{sh}(x)$, la fonction ch est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Elle atteint pour minimum $\mathrm{ch}(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1$. De même, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$, donc sh est croissante sur $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à calculer les limites. Clairement, $\underset{x\to+\infty}{\mathrm{ch}}(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{sh}}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ (aucune forme indéterminée, on a toujours l'un des deux termes du numérateur qui tend vers 0).
2. Les calculs précédents prouvent que $\mathrm{ch}'' = \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, qui est toujours positive, donc ch est une fonction convexe.
3. Pour les plus pointilleux, ch est paire et sh impaire, et les deux courbes se rapprochent l'une de l'autre du côté de $+\infty$.



4. La fonction f est définie en x si $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. C'est en fait toujours le cas. En effet, $\sqrt{x^2+1}$ existe toujours, et par croissance de la racine carrée, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$, donc $x + \sqrt{x^2+1} > |x| + x$ qui est toujours positif (c'est évident si $x > 0$, et ça vaut 0 sinon). Finalement, on a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
5. Calculons donc, avec un poil d'astuce à coups de quantité conjuguée, $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x)$. On a bien prouvé que f est une fonction impaire.
6. Comme l'expression sous la racine carrée ne s'annule jamais, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour le calcul de dérivée, posons d'abord $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, puis calculons $g'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. On en déduit que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. Calcul brutal et débile : $\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) = \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = \dfrac{4}{4} = 1$.
8. Calculons donc $f(\text{sh}(x)) = \ln(\text{sh}(x) + \sqrt{\text{sh}^2(x)+1})$. Or, d'après la question précédente, $\text{sh}^2(x) + 1 = \text{ch}^2(x)$, et comme $\text{ch}(x)$ est toujours positif, on peut simplifier $\sqrt{\text{sh}^2(x)+1} = \sqrt{\text{ch}^2(x)} = \text{ch}(x)$. On en déduit que $f(\text{sh}(x)) = \ln(\text{sh}(x) + \text{ch}(x)) = \ln(e^x) = x$.
9. On a en fait prouvé que f est la réciproque de la fonction sh. La formule donnée s'applique, en se souvenant que $\text{sh}' = \text{ch}$: $f'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}(f(x))}$. Or, $\text{ch}^2(f(x)) = \text{sh}^2(f(x)) + 1 = x^2 + 1$, donc $\text{ch}(x) = \sqrt{x^2+1}$ (tout est positif), et on retrouve bien $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
10. La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ puisque ch ne s'annule jamais. La fonction est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire par une fonction paire. Calculons donc sa dérivée : en partant de la définition $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ et en exploitant le calule de la question 7,

$\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1\mathrm{ch}^2(x)$. Cette dérivée étant clairement positive, la fonction th est croissante sur $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à calculer la limite en $+\infty$ (celle de l'autre côté en sera déduite par parité) : $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, il n'y a plus de forme indéterminée, et on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$. On aura donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$. Mettons toutes ces informations dans un beau tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Et concluons bien entendu avec une dernière belle courbe :