Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 1

MPSI Lycée Camille Jullian

16 septembre 2023

Exercice 1

Du calcul pour commencer, je vous demande de résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes (questions indépendantes) :

1. $e^x + 1 - \dfrac{3}{4}e^{-x} = 0$
2. $\ln(x^2 + 2x) < \ln(3)$
3. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \leqslant x + 2$
4. $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$
5. $\dfrac{x-1}{x^2+x-2} < 2$

Exercice 2

Les questions de ce deuxième exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Donner la réciproque et la contraposée de l'énoncé : « Je suis une déesse/un dieu des mathématiques, donc je vais avoir 20 à ce devoir ».
2. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes (pour chacune, f est une fonction réelle) :
   (a) f n'est pas une fonction constante.
   (b) f est une fonction strictement croissante.
   (c) f n'est pas majorée (autrement dit, elle prend des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite).
   (d) f s'annule au maximum une fois.
3. Pour chacun des couples de propositions suivants, compléter à l'aide du symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$, en justifiant à chaque fois votre réponse (les variables x et y sont à chaque fois des réels quelconques) :

(a)	$x = y$	$x^2 = y^2$
(b)	$x^3 = y^3$	$x = y$
(c)	$x^2 < x$	$x < 1$
(d)	$\lvert x + y\rvert = 0$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 0$
(e)	$x^2 + y^2 = 0$	$x = y = 0$

4. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (en justifiant votre réponse, bien entendu) :
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 < x$
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, p = kn$.
   (c) $\exists! n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = x(\ln(x))^n$, et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n. On rappelle que, d'après les résultats de croissance comparée classiques, on peut « oublier les ln » lors des calculs de limite.

1. Rappeler le domaine de définition des fonctions f_n, et préciser leurs limites.
2. Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2 et dresser leur tableau de variations complet.
3. Donner l'équation des tangentes aux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en leur point d'abscisse e.
4. Déterminer les limites en 0 des fonctions dérivées f_1' et f_2'. Que peut-on en déduire concernant les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ au voisinage de l'origine du repère ?
5. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
6. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On donne les valeurs approchées $\frac{1}{e} \simeq 0.37$ et $\frac{1}{e^2} \simeq 0.14$.
7. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ sur $]0, +\infty[$.
8. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+2}$ sur $]0, 1]$.
9. Étudier les variations de la fonction f_n pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour les trois dernières questions de cet exercice, on pourra être amené à distinguer deux cas selon la parité de l'entier n.

Exercice 4

On définit les fonctions ch et sh par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Aucune connaissance préalable sur ces fonctions n'est nécessaire, tous les résultats devront donc être démontrés. On posera par ailleurs $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

1. Préciser les limites, variations, et signe des deux fonctions ch et sh.
2. Quelle est la convexité de la fonction ch ?
3. Tracer une allure des courbes représentatives de ces deux fonctions dans un même repère.
4. Donner le domaine de définition de la fonction f.
5. Montrer que f est une fonction impaire (on rappelle que cela signifie que $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$).
6. Montrer que la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. Démontrer la formule suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
8. À l'aide du résultat de la question précédente, simplifier l'expression de $f(\mathrm{sh}(x))$ (on doit obtenir quelque chose de très simple). On **admet** que $f(\mathrm{sh}(x)) = \mathrm{sh}(f(x))$ pour tout réel x.
9. Si f est la réciproque de la fonction g, une formule que nous ne tarderons pas à voir en cours affirme que $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$ (partout où cela a un sens). Retrouver l'expression de $f'(x)$ à l'aide de cette formule.
10. On pose enfin $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Effectuer une étude complète de la fonction th.