Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 9

MPSI Lycée Camille Jullian

4 avril 2024

Problème

I. Étude rapide de f.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (taux d'accroissement en 0 de la fonction exponentielle), donc l'inverse $\dfrac{x}{e^x-1}$ a également pour limite 1 quand x tend vers 0. On peut donc prolonger f « en posant $f(0)=1$ » pour obtenir une fonction continue en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$).

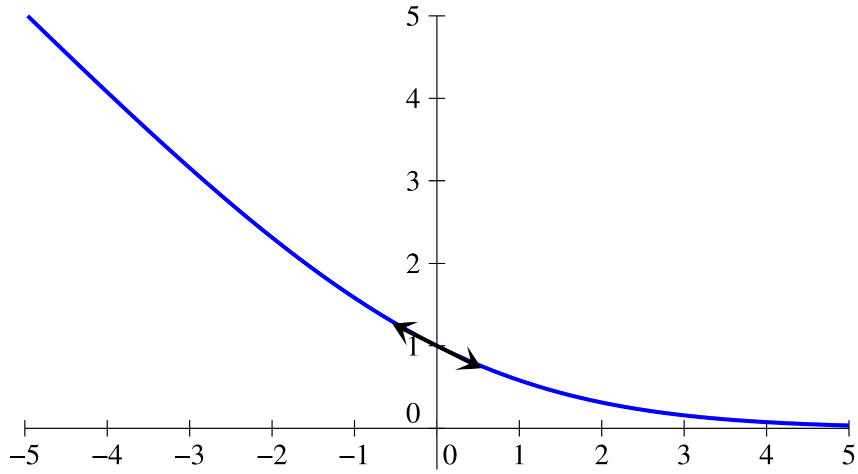
2. Le taux d'accroissement de f en 0 est défini par $\tau(h)=\dfrac{f(h)-1}{h}=\dfrac{\frac{h}{e^h-1}-1}{h}=\dfrac{1+h-e^h}{h(e^x-1)}$. Or, le développement limité à l'ordre 2 de l'exponentielle en 0 nous permet d'affirmer que $e^h=1+h+\dfrac{1}{2}h^2+o(h^2)$, donc $1+h-e^h\underset{h\to 0}{\sim}-\dfrac{1}{2}h^2$, et $\tau(h)\sim-\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{e^h-1}=-\dfrac{1}{2}f(h)$, qui admet donc pour limite $-\dfrac{1}{2}$ en 0. La fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

3. Ce développement limité est donné par les calculs précédents : $f(x)\underset{x\to 0}{=}f(0)+xf'(0)+o(x)=1-\dfrac{1}{2}x+o(x)$.

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$. Le numérateur de cette dérivée n'ayant pas un signe évident, on va poser $\alpha(x)=e^x-1-xe^x$ et dériver cette fonction : $\alpha'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$. Cette dérivée α' est du signe de $-x$, donc α est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, admettant un maximum en 0 de valeur $\alpha(0)=1-1-0=0$. La fonction α est donc toujours négative, ce qui prouve que f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (pas de forme indéteminée). De l'autre côté, on peut par exemple dire que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{x}{e^x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (croissance comparée). Puisqu'on nous le demande, dressons donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

5. On indique bien sûr la tangente calculée un peu plus haut, et pas grand chose d'autre :



II. Des histoires de développements limités.

1. Un calcul très rapide à partir du développement limité de l'exponentielle donne $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(k+1)!} + o(x^n)$.
2. On peut simplement justifier l'existence du DL par le fait que le calcul qu'on s'apprête à faire à la question 3 se généralise à tout ordre : en écrivant le DL à l'ordre $n+1$ de l'exponentielle en 0, on constate que $e^x - 1 = x(P(x) + o(x^n))$, où P est un polynôme de degré n et de coefficient constant égal à 1 (peu importe la valeur des autres coefficients), donc $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{P(x) + o(x^n)} = \frac{1}{1+u}$, où u est une expression polynômiale de degré n ayant une limite nulle quand x tend vers 0. On peut alors calculer $f(x) = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n + o(x^n)$, ce qui donne le développement limité souhaité en tronquant le calcul à l'ordre n.
3. En écrivant donc le DL initial de l'exponentielle à l'ordre 4, $f(x) = \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)}$. On pose comme expliqué à la question précédente $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$, puis on calcule $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^3)$. On n'oublie pas de mulriplier les coefficients obtenus par les factorielles correspondantes pour en déduire que $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$ et $b_3 = 0$.
4. La formule de Taylor-Young permet d'affirmer que $b_k = f^{(k)}(0)$, à condition bien sûr de prouver rigoureusement que f est dérivable k fois en 0. On va faire semblant de ne pas s'être rendu compte de ce détail, et se contenter d'appliquer la formule de Leibniz pour calculer la dérivée n-ème du produit $(e^x - 1)f(x)$ (avec $n \geqslant 2$). Puisque toutes les dérivées de la fonction $x \mapsto e^x - 1$ sont égales à la fonctions exponentielle, on obtient $(e^x - 1)f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^n f^{(n-k)}(x)$. Or, cette dérivée n-ème est nulle puisque la fonction qu'on vient de

dériver est égale à la fonction identité. Si on évalue cette expression pour $x = 0$, on trouve alors immédiatement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$ (le terme en-dehors de la somme étant nul à cause du facteur $e^x - 1$).

5. Il faut appliquer la formule précédente au rang $n+1$ pour faire apparaître b_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = 0$, donc $b_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$ en effectuant un changement de variable pour remplacer k par $n-k$ (ça ne change pas la valeur du coefficient binômial à cause de la symétrie des coefficients binômiaux, seul l'indice des coefficients b_{n-k} ainsi que les indices de la somme sont modifiés, ce qui rend la relation plus lisibe). On en déduit $b_4 = -\dfrac{1}{5}(b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3) = -\dfrac{1}{5}\left(1 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{1}{30}$, puis $b_5 = -\dfrac{1}{6}(b_0 + 6b_1 + 15b_2 + 20b_3 + 15b_4) = -\dfrac{1}{6}\left(1 - 3 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = 0$ (eh oui, encore), et enfin $b_6 = -\dfrac{1}{7}(b_0 + 7b_1 + 21b_2 + 35b_3 + 35b_4 + 21b_5) = -\dfrac{1}{7}\left(1 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{6}\right) = \dfrac{1}{42}$. On démontrera plus loin que tous les coefficients d'indice impair supérieur ou égal à 3 sont nuls. Pour ceux qui espéraient une régularité sur les coefficients d'indices pairs, ce n'est absolument pas le cas, je vous donne les suivants pour que vous puissiez le constater par vous-mêmes : $b_8 = -\dfrac{1}{30}$ (le même que b_4 donc), $b_{10} = \dfrac{5}{66}$ (ça commence à devenir moche), $b_{12} = -\dfrac{691}{2\ 730}$ (no comment), mais $b_{14} = \dfrac{7}{6}$.

III. Une suite de polynômes.

1. Il suffit de recopier la définition : $B_0 = 1$, $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$, puis $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.
2. Toujours par définition, $B_n(0) = b_n$, et $B_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = b_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = b_n$ en reprenant la relation démontrée en question $II.4$. En fait, cette relation n'est vraie que pour $n \geqslant 2$...
3. On dérive l'expression donnée : $B'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} b_{n-k} X^{k-1}$. Or, on sait que $k \times \dbinom{n}{k} = n \times \dbinom{n-1}{k-1}$ (formule sans nom), donc $B'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} b_{n-k} X^{k-1}$. On s'empresse de décaler les indices : $B'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} b_{n-1-k} X^k = nB_{n-1}$. Autrement dit, $\dfrac{1}{n} B_n$ est une primite de B_{n-1}, donc $\displaystyle\int_0^1 B_{n-1}(t)\ dt = \dfrac{1}{n}[B_n(t)]_0^1 = 0$ en reprenant le résultat de la question précédente.
4. (a) Puisque B_0 est constant, $B_0(1 - X) = 1$, donc $Q_0(X) = (-1)^0 \times 1 = 1$.
   (b) On a manifestement $Q'n(X) = (-1)^{n+1} B'n(1-X) = n(-1)^{n-1} B_{n-1}(1-X) = nQ_{n-1}(X)$. De plus, on en déduit facilement que $\displaystyle\int_0^1 Q_n(t)\ dt = \dfrac{1}{n+1}(Q_n(1) - Q_n(0)) = 0$ (puisque

$Q_n(1) = Q_n(0)$, les valeurs étant les mêmes au signe près que celles de $B_n(1)$ et $B_n(0)$). Montrons alors par récurrence que $Q_n(X) = B_n(X)$. C'est vrai au rang 0, et, si on le suppose vrai au rang n, la calcul qu'on vient d'effectuer prouve que Q_{n+1} et B_{n+1} ont le même polynôme dérivé (puisque $Q'_{n+1} = (n+1)Q_n = (n+1)B_n = B'_{n+1}$). Les polynômes Q_{n+1} et B_{n+1} sont donc égaux à une constante près. Or, ils ont tous les deux une intégrale nulle sur l'intervalle $[0,1]$, ce qui prouve que cette constante est nulle (la différences de deux polynômes est constante, et l'intégrale de cette constante entre 0 et 1 est nulle), et donc que $Q_{n+1} = B_{n+1}$.

(c) Si n est impair (et plus grand que 2, cf question 2), on a d'une part $B_n(1) = B_n(0)$ et d'autre part $B_n(0) = Q_n(0) = (-1)^n B_n(1) = -B_n(1)$, ce qui prouve évidemment que $B_n(0) = 1$, et donc que $b_n = 0$.