Devoir Maison n° 9

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 4 avril 2024

Problème

On pose pour tout cet exercice $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

I. Étude rapide de f.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera toujours f ce prolongement dans la suite du problème.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et préciser en particulier la valeur de $f'(0)$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 1 de f en 0.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.
5. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

II. Des histoires de développements limités.

1. En posant $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, donner le DL à l'ordre n en 0 de la fonction g.
2. Justifier que f admet un DL_n en 0 pour tout entier naturel n. On notera ce DL sous la forme $f(x) \underset{x \to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$.
3. Calculer le DL_3 en 0 de f, en déduire les valeurs de b_0, b_1, b_2 et b_3.
4. En partant de l'égalité $(e^x - 1)f(x) = x$, montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.
5. En déduire une relation de récurrence permettant de calculer b_n en connaissant les termes précédents de la suite. Appliquer la formule pour calculer b_4, b_5 et b_6 (le plus beau de tous).

III. Une suite de polynômes.

On pose dans cette dernière partie $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$. Les polynômes B_n sont appelés polynômes de Bernoulli (les nombres b_n étant eux-mêmes connus sous le nom de nombres de Bernoulli).

1. Déterminer explicitement les polynômes B_0, B_1 et B_2.
2. Montrer que $B_n(0) = B_n(1)$.
3. Montrer que $B_n' = nB_{n-1}$, et que $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0$.
4. On pose $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.
   (a) Montrer que $Q_0(X) = B_0(X)$.
   (b) Calculer $Q_n'(X)$, puis en déduire que $Q_n(X) = B_n(X)$ pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$.