Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 8

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 5 mars 2024

Problème

Ce problème propose d'étudier (sommairement) la notion de nombre algébrique, ainsi que certains polynômes classiques en lien avec cette notion.

I. Nombres algébriques.

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est dit **algébrique** s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(z) = 0$. Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit **transcendant**. Si z est un nombre algébrique, on appelle **degré de** z le degré minimal des polynômes à coefficients rationnels annulant z. Le **polynôme minimal** de z est le polynôme unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ de plus petit degré ayant z pour racine.

1. Montrer que, si z est un nombre algébrique, il existe un polynôme à coefficients **entiers** dont z est racine.
2. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
3. Montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre algébrique de degré 2.
4. Montrer que le nombre complexe $1 + i$ est un nombre algébrique. Donner son degré et son polynôme minimal.
5. Rappeler la valeur des six racines sixièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont toutes algébriques et donner le degré et le polynôme minimal de chacune.
6. Déterminer le polynôme minimal de $5 + i\sqrt{3}$.
7. Soient α et β deux nombres algébriques de degré 2. On note γ la deuxième racine du polynôme minimal de α, et δ la deuxième racine du polynôme minimal de β.
   (a) Montrer que $(X - \alpha - \beta)(X - \alpha - \delta)(X - \gamma - \beta)(X - \gamma - \delta)$ est un polynôme à coefficients rationnels. En déduire que $\alpha + \beta$ est un nombre algébrique.
   (b) Déterminer un polynôme à coefficients rationnels dont $\alpha\beta$ est racine.
   (c) En admettant qu'on peut généraliser ces deux résultats à deux nombres algébriques de degrés quelconques, montrer que l'ensemble de tous les nombres algébriques est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

II. Polynômes cyclotomiques.

Soit n un entier naturel non nul. On note Φ_n le polynôme minimal du nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Ce polynôme est appelé **polynôme cyclotomique d'ordre n.** On appelle par ailleurs **racine n-ème primitive de l'unité** tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ pour lequel $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $z^k \neq 1$ (autrement dit, n est le plus petit entier non nul pour lequel $z^n = 1$). On notera $\mathbb{P}_n$ l'ensemble de ces racines n-èmes primitives de l'unité.

1. Donner la liste des racines huitièmes primitives de l'unité.
2. Montrer que $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine n-ème primitive de l'unité si et seulement si $k \wedge n = 1$.
3. Expliquer pourquoi une racine n-ème de l'unité est nécessairement racine d'un polynôme cyclotomique Φ_k, pour un entier $k \leqslant n$.
4. Montrer que, si n et p sont deux entiers non nuls distincts, Φ_n et Φ_p sont premiers entre eux.
5. Montrer qu'une racine n-ème de l'unité qui n'est **pas** primitive ne peut pas être racine de Φ_n.
6. Montrer que $\Phi_n = \displaystyle\prod_{z \in \mathbb{P}_n} (X - z)$ (si on n'y arrive pas, on admet ce résultat pour la suite).
7. Montrer que $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k|n} \Phi_k$ (le produit est pris sur tous les entiers k qui sont des diviseurs de n).
8. À l'aide de la question précédente, déterminer les polynômes Φ_n pour $n = 1$, 2, 3, 4, 5, 6.
9. Que vaut $\Phi_n(0)$ lorsque $n \geqslant 2$?
10. Calculer $\Phi_n(1)$ (toujours pour $n \geqslant 2$) en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n (une simple conjecture sera appréciée, la démonstration est difficile).