Devoir Maison n° 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

15 février 2024

Exercice 1

Notons u_n le nombre de murs différents de longueur n qu'on peut construire. On a manifestement $u_1 = 2$ (un bloc vertical dont il faut choisir la couleur) et $u_2 = 8$ (soit deux blocs horizontaux qui donnent 4 possibilités de choix de couleur, soit deux blocs verticaux qui donnent eux aussi quatre choix de couleur possibles). De façon plus générale, si on veut construire un mur de longueur $n+2$ avec $n \geqslant 1$, on a deux possibilités pour commencer le mur :

- soit on commence avec deux blocs horizontaux (4 choix possibles) et il reste à compléter par un mur de longueur n, ce qu'on peut faire par définition de u_n façons différentes.
- soit on commence avec **un** bloc vertical (deux choix possibles, aucune raison ici qu'on n'ait pas des blocs horizontaux après un premier bloc vertical) qu'on complète avec un mur de longueur $n+1$, donc de u_{n+1} façons différentes.

Il y a donc au total $4u_n + 2u_{n+1}$ possibilités, ce qui nous donne la relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_n + 2u_{n+1}$ (on a bien compté chaque possibilité une et une seule fois). Notons en passant que cette relation est cohérente avec un choix de valeur initiale $u_0 = 1$ (pour construire un mur de longueur 0, il y a une façon de procéder, c'est de ne rien faire), ce qu'on imposera pour simplifier les calculs ultérieurs. La suite (u_n) est donc récurrence linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique $x^2 - 2x - 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$ et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{20}}{2} = 1+\sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{20}}{2} = 1-\sqrt{5}$. Il existe donc deux réels A et B tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(1+\sqrt{5})^n + B(1-\sqrt{5})^n$. Les conditions initiales imposent $u_0 = 1 = A + B$ et $u_1 = 2 = A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5})$. On a donc $B = 1 - A$ puis $2 = A(1+\sqrt{5}) + 1 - \sqrt{5} - A(1-\sqrt{5})$, soit $1 + \sqrt{5} = 2A\sqrt{5}$, donc $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. On en déduit $B = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ puis $u_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2\sqrt{5}}$. Par exemple, $u_{10} = 91\ 136$ ou $u_{42} = 1\ 906\ 528\ 696\ 230\ 842\ 728\ 448$.

Problème

Ce problème est plus qu'inspiré de l'épreuve « Mathématiques Commune » du concours des Petites Mines 1997 (ou plutôt du premier problème de cette épreuve). Je pourrais donc me contenter de vous renvoyer vers les corrigés qu'on peut trouver facilement en ligne, mais je vais quand même vous donner ma version (et j'ai modifié deux ou trois questions faisant intervenir des développements limités en cours de route).

I. Étude de la fonction f.

1. La fonction f étant trivialement continue ailleurs qu'en 0 (avec bien sûr la condition $x > -\dfrac{1}{2}$ pour que le ln soit défini), seule la continuité en 0 est vraiment intéressante. Or, on sait tous que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite classique de taux d'accroissement), donc, en remplaçant le x par un

$2x$ qui va lui aussi tendre vers 0, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2$, et donc que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, ce qui tombe particulièrement bien puisque l'énoncé impose justement de poser $f(0) = 1$. La fonction f est donc aussi continue en 0.

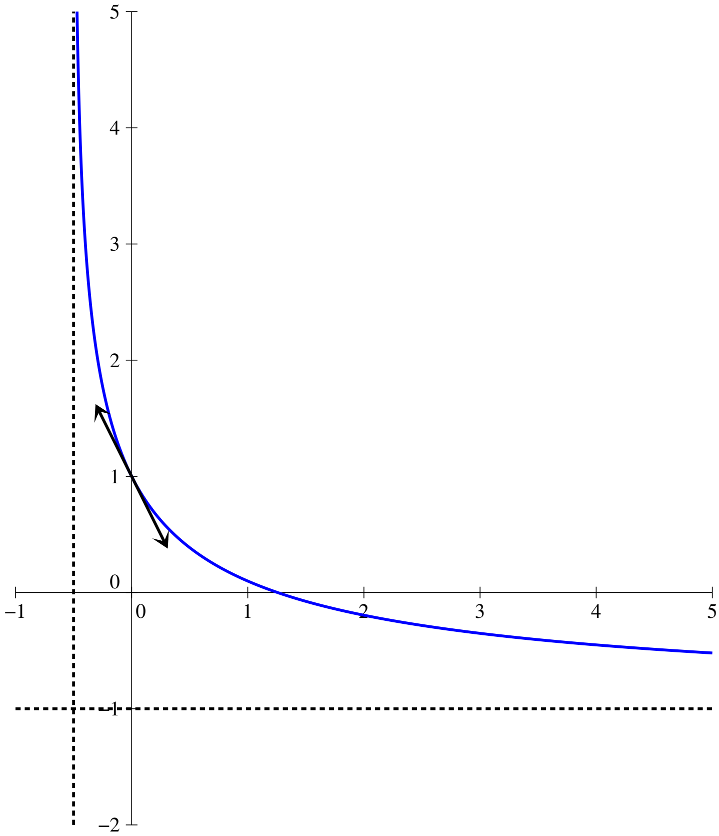
2. Non, ce n'est pas une question difficile, on peut appliquer le résultat précédent avec un h égal à $2x$ (puisque ce dernier va tendre vers 0) pour écrire $\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + 4x^2\varepsilon(2x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(2x) = 0$. On introduit cette expression dans le taux d'accroissement de f en 0 : $\tau_{0,f}(x) = \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{x} - 2 + 4\varepsilon(2x) - \dfrac{2}{x} = -2 + 4\varepsilon(2x)$, qui a une limite égale à -2 quand x tend vers 0. La fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = -2$.

3. Ailleurs qu'on 0, on calcule $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{1+2x}x - \ln(1+2x)}{x^2} = \dfrac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{(1+2x)x^2}$. Le dénominateur de cette dérivée étant positif sur $\mathcal{D}_f$, $f'(x)$ est du signe de $2x - (1+2x)\ln(1+2x)$, expression qu'on va noter $z(x)$. La fonction z est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $z'(x) = 2 - 2\ln(1+2x) - (1+2x) \times \dfrac{2}{1+2x} = -2\ln(1+2x)$. Cette dérivée est donc du signe opposé à celui de $\ln(1+2x)$, qui s'annule pour $x = 0$. On en déduit le tableau de variations suivant (z s'annulant aussi pour $x = 0$) :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$z'(x)$		$+$	0	$-$	
z		$\nearrow$	0	$\searrow$	

La fonction f' est donc négative, ce qui prouve que f est décroissante sur $\mathcal{D}_f$. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 0$ (si on trouve que ça ne ressemble pas assez à de la croissance comparée, on majore par exemple le numérateur par $\ln(3x) = \ln(3) + \ln(x)$ avant de conclure) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. Pas de forme indéterminée de l'autre côté : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ (attention quand même à la division par le x du déniminateur qui est négatif pour justifier le signe de cette limite). La fonction f étant continue et décroissante, elle est donc bijective de $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ vers $]-1, +\infty[$. En particulier, f s'annule effectivement une fois. Cette valeur d'annulation s'obtient par dichotomie (donc avec l'aide de la calculatrice vu la précision demandée) : $f(0) = 1$ donc $0 < \alpha$, puis $f(1) = \ln(3) - 1 > 0$, donc $1 < \alpha$, et $f(2) = \dfrac{\ln(5)}{2} - 1 < \dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(3) - 1 < 0$, donc $1 < \alpha < 2$. Commençons la dichotomie à la main : $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{3}\ln(4) - 1 = \dfrac{4}{3}\ln(2) - 1 < 0$, donc $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$. Ensuite, $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{4}{5}\ln\left(\dfrac{7}{2}\right) - 1 \simeq 0.002$ (là j'ai sorti la calculatrice), donc $\dfrac{5}{4} < \alpha < \dfrac{3}{2}$. La valeur très proche de 0 obtenue laisse supposer qu'on est déjà très proche de α, ce qui sera confirmé par les calculs suivants que je ne détaillerai pas : $f(1.4) \simeq -0.05$, $f(1.3) \simeq -0.015$, $f(1.28) \simeq -0.008$ et $f(1.26) \simeq -0.001$ (oui, ce n'est pas une dichotomie parfaite, mais on a le droit de prendre les valeurs qui nous arrangent). Il est temps de conclure : $1.25 < \alpha < 1.26$, on a notre valeur approchée à 10^{-2} près.

4. On place évidemment la tangente en 0 calculée en début de problème, et pas grand chose d'autre (à part l'annulation en α).



II. Étude d'une suite récurrente.

1. Il suffit de démontrer par une récurrence triviale que tous les termes de la suite existent et sont positifs : c'est le cas pour u_0 par hypothèse, et si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \ln(1+2u_n) > 0$, ce qui achève la récurrence.
2. La fonction g étant continue, la suite ne peut converger que vers un point fixe de g, donc un réel l vérifiant $g(l) = l$. Or, si $l \neq 0$, cela implique $\dfrac{\ln(1+2l)}{l} = 1$, soit $f(l) = 0$, donc $l = \alpha$. Il y a tout de même un deuxième point fixe de la fonction g qui peut être limite de la suite (u_n), c'est tout simplement $l = 0$.
3. La fonction g est strictement croissante (composée de deux fonctions croissantes), $g(0) = 0$ et $g(\alpha) = \alpha$, donc $g(]0,\alpha]) =]0,\alpha]$. L'intervalle est donc stable par g, et une récurrence triviale montre que tous les termes de la suite appartiennent alors à $]0,\alpha]$. Or, sur cet intervalle $g(x)-x$ ne change pas de signe (puisque c'est l'expression d'une fonction continue qui ne s'annule pas, sinon il y aurait un autre point fixe de g entre 0 et α). Comme $g(1) = \ln(3) > 1$, $g(x) - x$ est toujours positif sur $]0,\alpha]$. On en déduit que, sous notre hypothèse, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \geqslant 0$. La suite est donc croissante. Étant majorée par α et minorée par $u_0 > 0$, elle converge (théorème de convergence monotone) nécessairement vers α (puisqu'elle ne peut pas tendre vers 0).
4. On montre exactement comme ci-dessus que l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ est stable par g, puis que tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle, et enfin que $g(x) - x \leqslant 0$ sur cet intervalle (par exemple $g(2) = \ln(5) < 2$). La suite (u_n) est alors décroissante minorée par α, elle converge donc (vers α).
5. Comme dans les questions précédente, on aura l'intervalle $[1,\alpha]$ qui est stable par g (toujours pour les mêmes raisons), donc $u_n \in [1,\alpha]$ pour tout entier n. Or, $f'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$, donc f' est décroissante et positive sur $[1,\alpha]$, majorée par $f'(1) = \dfrac{2}{3}$. On peut alors appliquer

l'IAF à $y = \alpha$ et $x = u_n$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle, pour en déduire que $|g(u_n) - g(\alpha)| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$, donc que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$. Il ne reste plus qu'à démontrer l'inégalité demandée par récurrence : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| < 1$ puisque $\alpha \simeq 1.25$, ce qui prouve l'initialisation. Ensuite, si on suppose que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$, en appliquant successivement le résultat de l'IAF et l'hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. Cela prouve bien notre inégalité. En particulier, on aura $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$ dès que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-4}$, donc si $n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant -4\ln(10)$, ou encore $n \geqslant \frac{4\ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)}$. On pourrait presque faire l'application numérique à la main, mais puisqu'on a déjà sorti la calculatrice pour la dichotomie, autant en profiter. Elle nous informe que $n = 23$ est suffisant pour assurer la précision demandée.

III. Étude d'une primitive de f.

1. Par définition, F est la primitive de la fonction f s'annulant en 0. En particulier, F est dérivable et $F' = f$. L'étude de f effectuée auparavant prouve donc que F est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, \alpha\right]$ et décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

2. Puisque $F(0) = 0$, le taux d'accroissement de la fonction F en 0 est défini par $\tau_{0,F}(x) = \frac{F(x)}{x}$. Comme F est dérivable et de dérivée f, on a donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = f(0) = 1$.

3. La fonction f étant décroissante, on peut par exemple affirmer que, $\forall x \geqslant 42$, $f(x) \leqslant f(42) < 0$. On peut intégrer cette inégalité sur l'intervalle $[42, x]$ (avec l'hypothèse $x \geqslant 42$) pour en déduire que $\int_{42}^{x} f(t)\, dt \leqslant \int_{42}^{x} f(42)\, dt = f(42)(x - 42)$. Autrement dit, l'intégrale de gauche est majorée par une expression ayant pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{42}^{x} f(t)\, dt = -\infty$. Or (relation de Chasles), $\forall x \geqslant 42$, $F(x) = \int_{0}^{42} f(t)\, dt + \int_{42}^{x} f(t)\, dt$, avec $\int_{0}^{42} f(t)\, dt$ qui est une constante. Finalement, $\underset{x \to +\infty}{F}(x) = -\infty$ (on reverra ce genre de raisonnements plus en détail dans un prochain chapitre consacré à l'intégration).

4. (a) Posons donc $a(t) = \ln(1 + 2t) + \frac{1}{\sqrt{1 + 2t}}$. La fonction a est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$, et $a'(x) = \frac{2}{1 + 2t} - \frac{1}{(1 + 2t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{1 + 2t} - 1}{(1 + 2t)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée est du signe de $2\sqrt{1 + 2t} - 1$, expression qui est positive si $\sqrt{1 + 2t} \geqslant \frac{1}{2}$, donc si $1 + 2t \geqslant \frac{1}{4}$, soit $t \geqslant -\frac{3}{8}$ (qui se trouve dans notre intervalle de définition). La fonction a est donc décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right]$ puis croissante sur $\left[-\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right]$, admettant pour minimum $a\left(-\frac{3}{8}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = -2\ln(2) + 2 > 0$. La fonction a est donc toujours positive, ce qu'on voulait démontrer. On en déduit immédiatement que, sur ce même intervalle, $f(t) \leqslant \frac{-1}{t\sqrt{1 + 2t}} - 1$. Or, si $t \leqslant -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} \leqslant 4$ (il y a double changement de signe, une fois à cause du signe $-$ et une autre à cause du passage à l'inverse), ce qui donne la majoration demandée.

(b) Supposons $x \leqslant -\frac{1}{4}$, alors on peut intégrer l'inégalité précédente : $\int_x^{-\frac{1}{4}} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{-\frac{1}{4}} \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1\,dt = [4\sqrt{1+2t} - t]_x^{-\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} - 4\sqrt{1+2x} + x \leqslant 2\sqrt{2}$ puisque $\frac{1}{4} + x \leqslant 0$ et $-4\sqrt{1+2x} \leqslant 0$. Or, $F(x) - F\left(-\frac{1}{4}\right) = \int_{-\frac{1}{4}}^{x} f(t)\,dt$ (relation de Chasles), donc $F(x) - F\left(-\frac{1}{4}\right) \geqslant -2\sqrt{2}$.

(c) On sait que F est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$ et continue, elle admet donc une limite à droite en $-\frac{1}{2}$ qui est soit finie, soit égale à $-\infty$. La minoration précédente exclut la possibilité d'une limité infinie, donc F admet une limite **finie** en $-\frac{1}{2}$, et elle y est donc prolongeable par continuité.

(d) On sait que $F' = f$, et que f a pour limite $+\infty$ en $-\frac{1}{2}$. La fonction F n'est donc pas dérivable en $-\frac{1}{2}$, il y aura pour sa courbe une demi-tangente verticale à cet endroit.

5. Il manque une valeur approchée du maximum de F (atteint en α) pour vraiment pouvoir tracer une courbe crédible :