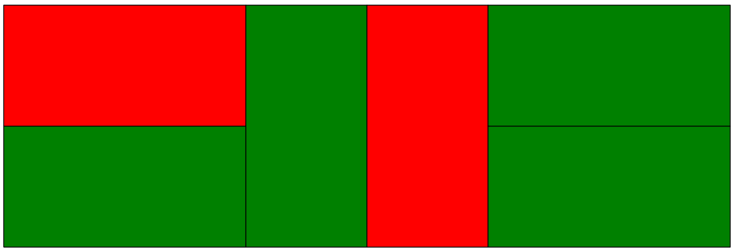
Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 7

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 15 février 2024

Exercice 1

On souhaite construire un mur de 2 mètres de haut et de n mètres de long à l'aide de blocs d'un metre sur deux de deux couleurs différentes (rouges et verts). Un exemple de tel mur de longueur 6 est donné ci-dessous (en noir et blanc, le vert et le rouge se verront moins bien, mais on devrait réussir à distinguer le fait qu'il y a deux couleurs). Combien de murs différents peut-on construire (il n'y a aucune contrainte sur la répartition des blocs des deux couleurs) ?



Problème

Ce problème est un problème de révision d'analyse, tiré d'un vieux sujet de concours (mais bien sûr, essayez de le faire vous même plutôt que d'aller chercher un éventuel corrigé).

On définit dans ce problème la fonction f sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

I. Étude de la fonction f.

1. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition (on s'intéressera bien sûr particulièrement attentivement à ce qui se passe en 0).
2. Montrer que f est dérivable en 0, et déterminer $f'(0)$. Pour cette question, on aura le droit d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 suivant : $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f. On montrera en particulier que f s'annule en un unique point α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près en précisant la méthode employée.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

II. Étude d'une suite récurrente.

Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$. On notera si besoin g la fonction $x \mapsto \ln(1 + 2x)$.

1. Vérifier que (u_n) est bien définie.
2. Si on suppose que (u_n) converge, que vaut nécessairement sa limite ?
3. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, \alpha]$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \alpha]$. En déduire la monotonie puis la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer de même que (u_n) converge si on suppose cette fois que $u_0 > \alpha$.
5. On pose $u_0 = 1$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$. À partir de quel rang n_0 est-on sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près (on fera un calcul théorique avant de donner la valeur concrète de n_0) ?

III. Étude d'une primitive de f.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

1. Préciser les variations de la fonction F (pratiquement aucun calcul à faire).
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$.
3. Déterminer (et justifier) la limite de F quand x tend vers $+\infty$.
4. (a) Montrer que, $\forall t \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$, on a $\ln(1 + 2t) \geqslant \dfrac{-1}{\sqrt{1+2t}}$, puis $f(t) \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1$.
   (b) En déduire que $F(x) - F\left(-\frac{1}{4}\right)$ est minorée sur $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.
   (c) Montrer que F est prolongeable par continuité à droite en $-\frac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer la valeur de la limite correspondante, qu'on notera simplement β.
   (d) La fonction F ainsi prolongée est-elle dérivable en $-\frac{1}{2}$?
5. En admettant que $\beta \simeq -1.14$, tracer une allure de la courbe représentative de F.