Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

29 janvier 2024

Exercice 1

Allons-y pour la méthode classique sûrement utilisée par beaucoup d'entre vous. On commence par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Manifestement pas de relation possible du type $A^2 = aA + bI_3$, on continue donc : $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On peut cette fois-ci constater que $A^3 = A^2 + 2A$. On prouve alors par récurrence l'existence de deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \geqslant 1$, $A^n = a_nA^2 + b_nA$. C'est manifestement le cas pour $n = 1$ en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, mais aussi pour $n = 2$ en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (tout est décalé par rapport aux calculs classiques vus en cours). Si on suppose que $A^n = a_nA^2 + b_nA$, alors $A^{n+1} = a_nA^3 + b_nA^2 = a_n(A^2 + 2A) + b_nA^2 = (a_n + b_n)A^2 + 2a_nA$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. De plus, on constate que $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$, ce qui permet de calculer $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$ (racines évidentes -1 et 2), donc il existe deux réels α et β tels que $\forall n \geqslant 1$, $a_n = \alpha(-1)^n + \beta \times 2^n$. Les conditions initiales imposent $a_1 = 0 = -\alpha + 2\beta$ et $a_2 = 1 = \alpha + 4\beta$. En additionnant ces deux équations, on a $6\beta = 1$ donc $\beta = \frac{1}{6}$, dont on déduit $\alpha = \frac{1}{3}$. Finalement $a_n = \frac{2(-1)^n + 2^n}{6} = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}$. On en déduit $b_n = 2a_{n-1} = \frac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3}$. Finalement, $A^n = a_nA^2 + b_nA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n-1} + (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^{n-1} + (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^{n-1} + (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^{n-1} + (-1)^n \end{pmatrix}$.

Une autre méthode possible une fois qu'on a calculé A^2 et A^3 : démontrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$, où la suite (a_n) vérifie $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, et la récurrence prouve que $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. On retrouve bien sûr la même relation que par la méthode précédente, mais un peu moins de calculs à faire.

Exercice 2

1. C'est évidemment trivial pour la fonction nulle : $0 \times 0 = 2 \times 0 \times 0$. Si on suppose f constante égale à k, on doit donc avoir $k + k = 2 \times k \times k$, soit $k = k^2$, ce qui est vérifié pour $k = 0$ et $k = 1$. La fonction constante égale à 1 satisfait les conditions, sauf bien sûr celle d'annulation (si f est constante et s'annule, elle est nécessairement nulle !).
2. La suite de l'énoncé donne presque la réponse : la fonction cosinus est solution : $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$ découle des formules de transformation somme-produit.
3. En posant $x' = kx$ et $y' = ky$, qui sont tous aussi réels que x et y, une fonction solution vérifie $f(x' + y') + f(x' - y') = 2f(x')f(y')$, soit $f(k(x + y)) + f(k(x - y)) = 2f(kx)f(ky)$, ou encore $f_k(x + y) + f_k(x - y) = 2f_k(x)f_k(y)$, ce qui prouve que f_k est aussi solution du problème.
4. (a) En posant $x = y = 0$ dans la relation, $2f(0) = 2f(0)^2$, ce qui implique bien $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

   (b) En posant $y = 0$ (en conservant un x quelconque), $2f(x) = 2f(x)f(0)$. Si on suppose $f(0) = 0$, on a donc $f(x) = 0$ pour tout réel x.

(c) On pose cette fois $x = 0$ en conservant y quelconque : $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y)$, soit en supposant $f(0) = 1$, $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, ou encore $f(-y) = f(y)$. La fonction f est alors paire.

(d) Posons $y = x$, alors $f(2x) + f(0) = 2f(x)^2$. En remplaçant $f(0)$ par 1 et $2x$ par x, $f(x) + 1 = 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$, ce qui est bien la formule souhaitée.

(e) On pose cette fois-ci $x = a$ et on remplace y par $a - x$, pour obtenir $f(2a - x) + f(x) = 2f(a)f(a - x) = 0$, ce qui donne bien $f(2a - x) = -f(x)$. Bien sûr, en remplaçant ce même x par $-x-2a$, on a alors $f(2a-(-x-2a)) = -f(-x-2a)$, soit $f(4a+x) = f(-x-2a) = -f(x+2a)$ (puisque f est paire). De plus, $f(x+2a) = -f(2a-(x+2a)) = -f(-x) = -f(x)$. Finalement, en combinant les deux égalités, $f(4a + x) = f(x)$, et f est $4a$-périodique.

5. (a) Par hypothèse, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, et manifestement pas en 0 puisque $f(0) = 1$. Si jamais notre valeur d'annulation est strictement négative, on en trouve facilement une positive en prenant son opposé puisque f est paire.

(b) L'ensemble Z est non vide (question précédente) et minoré par 0, il a donc une borne inférieure.

(c) La première partie est simplement la caractérisation de la borne inférieure. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, et par continuité de la fonction f, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$. Comme $f(x_n) = 0$ par définition, on a bien $f(a) = 0$. Bien sûr, $a \geqslant 0$ en tant que borne inférieure d'un ensemble de réels strictement positifs, et $a \neq 0$ puisque $f(a) = 0$. On a donc bien $a > 0$.

(d) Par l'absurde, s'il existe un réel $b \in]0, a[$ tel que $f(b) \leqslant 0$, alors la fonction f s'annule entre 0 et b d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Mais cette valeur d'annulation serat strictement inférieure à a, ce qui contredit la définition de ce dernier.

(e) Allons-y donc pour une belle récurrence, portant bien sûr sur la valeur de l'entier q. Pour $q = 0$, on constate que $g\left(\frac{a}{2^q}\right) = g(a) = \cos(\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Comme on a par ailleurs $f(a) = 0$, l'égalité est vérifiée au rang 0. Supposons-la désormais vérifiée pour un certain entier q, alors en appliquant la relation de la question 4.d à $x = \frac{a}{2^q}$, on a $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 - 1$. Or, la formule de duplication des cosinus peut s'écrire sous la forme $\cos(x) = \cos\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. Appliquée à $x = \frac{\pi}{2^{q+1}}$, elle donne donc $g\left(\frac{a}{2^q}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{q+2}}\right) - 1 = 2\left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 - 1$. L'égalité supposée en hypothèse de récurrence implique donc $2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 - 1 = 2\left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 - 1$, d'où $\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$. Or, $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ d'après la question précédente, et $g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ car c'est le cosinus d'un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On peut donc tranquillement mettre des racines carrés autour de notre égalité précédente pour en déduire $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$, c'est-à-dire exactement notre formule au rang $q + 1$.

(f) Commençons par constater qu'on peut supposer $p \in \mathbb{N}$ en exploitant la parité de la fonction f et celle de la foncction g (si l'égalité est vérifiée pour $\frac{pa}{2^q}$, elle se le sera à l'identique pour $-\frac{pa}{2^q}$ en changeant les signes). On peut en fait aussi supposer $q \in \mathbb{N}$ puisqu'une puissance négative de 2 au dénominateur reviendrait à simplement avoir l'image d'un entier, ce qui revient à traiter le cas $q = 0$. Procédons ensuite par récurrence double sur la valeur de l'entier p. La formule est triviale pour $p = 0$ (les deux membres sont égaux à 1), et on vient de la prouver pour $p = 1$ à la question précédente. Supposons-la vérifiée pour un entier $p \geqslant 1$ et pour $p + 1$, et posons, dans la relation vérifiée par f, $x = \frac{(p+1)a}{2^q}$ et $y = \frac{a}{2^q}$ pour obtenir $f\left(\frac{(p+2)a}{2^q}\right) + f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) f\left(\frac{a}{2^q}\right)$. En exploitant les hypothèses de récurrence et le cas $p = 1$, on en déduit que $f\left(\frac{(p+2)a}{2^q}\right) = 2g\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{pa}{2^q}\right) = 2\cos\left(\frac{(p+1)\pi}{2^{q+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right) - \cos\left(\frac{p\pi}{2^{q+1}}\right)$. Or, tout élève qui connait des transformations somme-produit sait que $2\cos\left(\frac{(p+1)\pi}{2^{q+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right) = \cos\left(\frac{(p+2)\pi}{2^{q+1}}\right) + \cos\left(\frac{p\pi}{2^{q+1}}\right)$.

Il n'y a qu'à remplacer dans l'égalité précédente pour obtenir exactement la formule souhaitée au rang $p+1$. En fait, on exploite simplement (dans cette question comme dans la précédente) le fait que la fonction g vérifie exactement la même relation que la fonction f, et que l'égalité des deux fonctions va se « transmettre » à partir d'une valeur commune. Mais je ne crois pas qu'on puisse rédiger ça beaucoup moins lourdement qu'avec ces récurrences un peu brutales.

(g) Supposons $x > 0$ pour simplifier les choses (il faut juste changer le sens des inégalités si $x < 0$) : $\frac{2^n x}{a} - 1 < \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor \leqslant \frac{2^n x}{a}$. On en déduit immédiatement que $x - \frac{a}{2^n} < u_n \leqslant x$, et le théorème des gendarmes permet de conclure à la converge de la suite (u_n) vers x. La deuxième partie de la question est une conséquence immédiate de la question précédente, puisque la partie entière de $\frac{2^n x}{a}$ est évidemment un entier.

(h) Les fonction étant toutes les deux continues, un passage à la limite de la relation $f(u_n) = g(u_n)$ donne $f(x) = g(x)$. Les deux fonctions sont donc égales sur $\mathbb{R}$. On a donc prouvé que E ne contenait, outre la fonction nulle, que des fonctions de la forme $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$, avec $a > 0$. Plus simplement, on retrouve en fait toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \cos(kx)$, avec $k \neq 0$ (les valeurs négatives de k sont superflues, elles donnent les mêmes fonctions que les valeurs positives).