Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 6

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 29 janvier 2024

Exercice 1

Calculer par la (ou les) méthode(s) de votre choix les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble E des fonctions f qui vérifient les trois conditions suivantes :

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

1. Vérifier que la fonction nulle appartient à E. Existe-t-il d'autres fonctions constantes appartenant à E ? Qu'en serait-il si on supprimait la deuxième condition (on autorise des fonctions qui ne s'annulent jamais) ?
2. Donner une fonction usuelle (autre que la fonction nulle) appartenant à E (allez chercher du côté de la trigonométrie).
3. Montrer que, si $f \in E$ et $k \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $f_k : x \mapsto f(kx)$ appartient aussi à E.
4. On considère une fonction f appartenant à E. En choisissant des valeurs intelligentes pour x et y dans la troisième condition définissant l'ensemble E, démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   (b) si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.
   (c) si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.
   (d) si $f(0) = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1$.
   (e) si f s'annule en $a \in \mathbb{R}^*$, alors $f(2a - x) = -f(x)$, et f est une fonction périodique de période 4.
5. On suppose désormais que $f(0) = 1$.
   (a) Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) On note $Z = \{x \in \mathbb{R}^{+*} \mid f(x) = 0\}$. Montrer que Z admet une borne inférieure, qu'on notera désormais a.
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in Z$, $a \leqslant x_n < a + \frac{1}{n}$, en déduire que $f(a) = 0$, puis que $a > 0$.
   (d) Montrer que f est strictement positive sur l'intervalle $[0, a[$.
   (e) Soit $q \in \mathbb{N}$, montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$, où on a posé $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$. On pourra effectuer une récurrence exploitant le résultat de la question 4.*d*.
   (f) Montrer que, quels que soient les entiers p et q, $f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.
   (g) Soit x un réel quelconque, on pose $u_n = \dfrac{a\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor}{2^n}$. Montrer que la suite (u_n) converge vers x, et que $f(u_n) = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   (h) En déduire que la fonction f et la fonction g sont égales sur $\mathbb{R}$ tout entier, et décrire l'ensemble E.