Devoir Maison n^{o} 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

8 janvier 2024

Énigme 1 : le calendrier de l'Avent.

Une seule solution avec les valeurs déjà imposées : 18, 7, 9, 16, 20, 5, 11, 25, 24, 1, 8, 17, 19, 6, 3, 22, 14, 2, 23, 13, 12, 4, 21, 15, 10.

Pour ce qui est du nombre total de solutions, il va falloir que je reprenne des cours de Python, j'en suis toujours à essayer désespérément d'écrire un programme efficace. Mais une analyse « à la main » que je ne garantis pas totalement exacte me laisse penser qu'il n'y a en fait qu'une seule solution (à symétrie près, on peut bien sûr l'écrire dans les deux sens). Début de raisonnement, à poursuivre si vous êtes motivés : le 18 ne peut être à côté que du 7, il est donc nécessairement à une extrémité. Il est forcément suivi du 7, qui lui-même ne peut être suivi que du 2 ou du 9 (le 18 étant déjà pris de l'autre côté), etc. J'affirme en tout cas avec certitude que le 20 donné en cinquième case par l'énoncé est nécessairement à cette position.

Énigme 2 : l'âge du père Noël.

Les article Wikipedia consacré aux nombres amicaux donne la liste des premières paires d'entiers correspondants (parmi lesquels assez peu sont impairs), ce qui évite de faire soi-même un petit programme pour les obtenir. Un petit programme Python permet de déterminer si un nombre est heureux (c'est très laid, mais autant exploiter les facilités procurées par Python) :

```
def heureux(n) :
    a=n
    while a!=1 and a!=4 :
        a=sum(int(i)**2 for i in str(a))
    return a==1
```

On constate alors que le plus petit entier impair amical et heureux est 87 633. Pour vérifier le caractère brésilien, on peut là encore écrire un petit programme Python (le plus simple est alors de faire les conversions de l'entier n dans toutes les bases comprises entre 2 et $n-1$ et vérifier si l'écriture correspondante ne fait apparaître qu'un seul chiffre). Sinon, pour simplement constater que 87 633 est brésilien (une grande majorité des entiers le sont), on peut chercher à la main (on a des chances d'obtenir une « écriture brésilienne » avec peu de chiffres). La plus simple décomposition brésilienne de 87 633 est en base 29 210, où le nombre s'écrit simplement 33 puisque $87\ 633 = 3 \times 29\ 210 + 3$. Sinon, on peut aussi l'écrire 77 en base 12 518, ou 273273 en base 320 (ici, le 273 est à prendre comme un seul chiffre dans une base qui en contient plus de 300 !). Bref, notre père Noël a donc l'âge respectable de 87 633 ans.

Énigme 3 : le repas de Noël du pôle Nord.

Une façon de compter les choses : on choisit la place du premier renne, Comète, ce qui n'a aucune incidence sur les voisinages. On a ensuite $\binom{7}{2} = 21$ choix possibles pour les deux rennes voisins de Comète (un à gauche, un à droite, peu importe). Imaginons qu'on ait mis le remier de ces deux voisins à gauche de Comète, il faut alors choisir son voisin de gauche, pour lequel on a 5 choix possibles. De même, on choisit le voisin de droite du voisin de droite de Comète, plus que quatre choix possibles. On continue : trois puis deux choix possibles pour les voisins des deux derniers rennes placés, et enfin on met le huitième renne sur la dernière place disponible. On a donc $21 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = \frac{7!}{2} = 2\ 520$ dispositions possibles pour les rennes.

En fait, on peut obtenir le résultat précédent de façon beaucoup plus rapide : on place les rennes aléatoirement, ce qui fait 8! dispositions possibles. Il reste alors à compter le nombre de dispositions où les voisins sont identiques. Pour trouver toutes les dispositions identiques à une disposition donnée, on peut soit faire tourner cette disposition en décalant tout le monde d'un certain nombre de places autour de la table (on a donc 8 dispositions identiques à la disposition initiale), soit retourner complètement l'ordre des rennes (ce qui revient à faire une symétrie par rapport à un axe), ce qui peut se faire pour chacune des huit dispositions précédentes. On compte donc 16 fois chaque disposition possible, et le nombre de dispositions différentes vaut $\frac{8!}{16} = \frac{7!}{2}$. On généralise sans problème au cas des lutins, il y aura $\frac{41!}{2} \simeq 1.67 \times 10^{49}$ possibilités (c'est un peu beaucoup).

Énigme 4 : *les sapins de Noël.*

Il est clair qu'un seul ordre permet de voir les dix sapins, ce qui donne une probabilité égale à $\frac{1}{10!} = \frac{1}{3\ 628\ 800}$ (c'est pas beaucoup). Si on veut voir exactement neuf sapins, un seul doit être caché par plus grand que lui, les neuf autres étant dans l'ordre. Le sapin caché ne peut pas être le plus grand (qu'on appellera « numéro 10 » pour simplifier). S'il s'agit du numéro 9, il doit être derrière le 10, ce qui ne laisse qu'un ordre possible. S'il s'agit du numéro 8, on a deux possibilités (soit $1-2-3-4-5-6-7-9-10-8$, soit $1-2-3-4-5-6-7-9-8-10$). S'il s'agit du numéro 7, on peut le caser à trois endroits (entre le 8 et le 9, entre le 9 et le 10, ou tout derrière), puis on a quatre possibilités pour le numéro 6, et ainsi de suite jusqu'à avoir neuf possibilités pour le sapin numéro 1 (qu'on peut mettre partout sauf en premier, en conservant bien sûr l'ordre sur les autress sapins). On a donc au total $1+2+\cdots+9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$ cas où on verra neuf sapins, soit une probabilité égale à $\frac{45}{10!} = \frac{1}{80\ 460}$ (c'est un peu moins ridicule mais encore bien faible).

Passons au cas où on veut voir exactement huit sapins. On verra toujours le sapin numéro 10, comme dans le cas précédent. Si les deux sapins qu'on ne voit pas sont les sapins 8 et 9, on est obligés de les mettre derrière le 10, ce qui fait deux possibilités (soit $10-8-9$, soit $10-9-8$ pour les trois derniers sapins). Si on ne voit pas 9 et 7, on a trois possibilités (9 est derrière 10, et 7 soit entre 8 et 10, soit entre 10 et 9, soit derrière tout le monde). Si on ne voit pas 9 et 6, ce sera quatre possibilités (une pour caser le 9, puis 4 pour le 6), et ainsi de suite. Si ce sont les sapins 8 et 7 qui sont cachés, on a deux places possibles pour caser le 8 (entre 9 et 10, ou après 10), puis trois placements possibles pour le 7 une fois le 8 casé, soit six cas. Bref, après avoir tout compté de façon extrêmement laborieuse, on aboutit à un nombre total de cas qui vaut $1 \times (2+3+\cdots+9) + 2 \times (3+\cdots+9) + 3 \times (4+\cdots+9) + \cdots + 8 \times 9 = 870$ ordres possibles, donc une probabilité égale à $\frac{870}{10!} = \frac{29}{120\ 960} \simeq 0.000\ 24$. Encore bien faible.

Généralisons tout de suite ce superbe calcul au cas où il y a 42 sapins : il y a aura $\sum_{i=1}^{40} i \sum_{j=i+1}^{41} j$ cas où on verra exactement 40 sapins sur les 42, soit 358 750 cas, donc une probabilité égale à $\frac{358\ 750}{42!} \simeq 2.55 \times 10^{-46}$. Là, c'est vraiment ridiculement faible.

Si on veut vraiment calculer la moyenne du nombre de sapins visibles, il faut calculer toutes les probabilités, ce qui est assez infernal. Il y a bien sûr des probabilités plus simples à calculer que d'autres : par exemple on voit exactement un sapin si et seulement si le sapin numéro 10 est placé en premier, ce qui laisse une probabilité de $\frac{1}{10}$. Il n'y a à ma connaissance aucune formule simple pour calculer les probabilités de façon générale. Comme je suis un gros paresseux, j'ai écrit un programme Python qui a compté pour moi le nombre de cas pour chaque possibilité (avec 10 sapins, ça se fait en quelques secondes). En notant X le nombre de sapins visibles (histoire d'utiliser les notations classiques que nous reverrons en fin d'année), on a le tableau de probabilité suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{362\ 880}{10!}$	$\frac{1\ 026\ 576}{10!}$	$\frac{1\ 172\ 700}{10!}$	$\frac{723\ 680}{10!}$	$\frac{269\ 325}{10!}$	$\frac{63\ 273}{10!}$	$\frac{9\ 450}{10!}$	$\frac{870}{10!}$	$\frac{45}{10!}$	$\frac{1}{10!}$

Pour calculer la moyenne (ou l'espérance pour utiliser le vocabulaire des probabilistes), on multiplie chaque valeur par sa probabilité et on additionne, ce qui donne comme moyenne $\frac{10\ 628\ 640}{10!} = \frac{7\ 381}{2\ 520} \simeq$

2.929 sapins. Non, ça ne tombe même pas juste, et toute tentative de généralisation au cas des 42 sapins semble désespérée.

Énigme 5 : pour terminer, un bon dessert !

Notons a le côté du pentagone régulier qui constitue l'intérieur de l'étoile (là où il y a de la carotte). Rappelons qu'un pentagon régulier a des angles intérieurs de $\frac{3\pi}{5}$: en effet, on peut découper un pentagone (régulier ou non) en trois triangles, dont la somme des angles vaut évidemment π pour chacun. On a donc la somme des angles intérieurs du pentagone qui est toujours égale à 3π. Dans le cas d'un pentagone régulier, les cinq angles intérieurs étant égaux, ils ont pour mesure $\frac{3\pi}{5}$. Chacune des branches de l'étoile est alors constituée d'un triangle isocèle de base a (puisque c'est l'un des côtés du pentagone) et ayant ses deux angles identiques de mesure $\frac{2\pi}{5}$ (la somme d'un de ces angles avec un des angles intérieurs du pentagone donnant un angle plat), et donc un troisième angle de mesure $\frac{\pi}{5}$.

Pour simplifier les calculs, on va poser $a = 1$, ce qui ne change rien au rapport final des aires. Notre triangle isocèle a donc pour base 1 et des angles de base de mesure $\frac{2\pi}{5}$, donc en notant h la hauteur du triangle perpendiculaire à notre base 1, on a $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{h}{\frac{1}{2}} = 2h$, donc $h = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, et l'aire de notre branche vaut donc $\frac{1}{4}\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Il reste maintenant à calculer l'aire du pentagone régulier de côté 1. Pour cela, on le découpe en cinq triangles isocèles identiques en reliant le centre du pentagone à chaque sommet. Ces triangles ont une base 1, et leurs deux angles égaux ont pour mesure $\frac{3\pi}{10}$ (la moitié d'un angle intérieur du pentagone), ou si on préfère l'angle au centre du pentagone vaut $\frac{2\pi}{5}$ (ce qui est évidemment normal !). La hauteur h' issue du centre du pentagone vérifie alors $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{h'}$, donc $h' = \frac{1}{2\tan(\frac{\pi}{5})}$. L'aire de chacun de nos cinq triangles est donc égale à $\frac{1}{4\tan(\frac{\pi}{5})}$. Pas besoin de s'embêter à la multiplier par 5, puisque plus haut on a calculé l'aire d'une seule des cinq branches de l'étoile. Il suffit de faire le rapport des deux aires calculées pour obtenir $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Si on est savant (ou si on refait un ou deux exercices de feuilles d'exercices passées qui permettent d'obtenir ces valeurs), on sait que $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ (on peut bien sûr retrouver la deuxième formule à partir de la première via formule de duplication des tangentes), donc le produit vaut $\sqrt{25-20} = \sqrt{5}$.

Pour les plus masochistes qui se poseraient des questions sur le cas de l'étoile à 42 branches, c'est vraiment très compliqué : il y a plusieurs façons de construire l'étoile, et surtout les branches ne sont pas simplement des triangles posés autour d'un polygone régulier à 42 côtés (quel que soit le choix d'étoile effectué), ce qui rend le calcul des aires vraiment immonde.