

Devoir Maison n° 5 : Devoir de Noël

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 8 janvier 2024

Une tradition vieille d'un peu plus de deux ~~mille~~ ans veut qu'aux alentours du 25 décembre, les élèves de la MPSI du lycée Camille Jullian se voient distribuer par leur professeur de mathématiques (qui partage avec le vrai père Noël le port de la barbe et, euh, pas grand chose d'autre) ~~des tonnes de cadeaux~~ un devoir à la maison un peu spécial, constitué de petites énigmes sur le thème de Noël (quelle originalité). Ce devoir est entièrement facultatif et destiné à s'amuser un peu entre deux bouchées de dinde aux marrons et deux parties du dernier jeu vidéo à la mode que le vrai père Noël a déposé dans vos souliers (en ce qui me concerne, un bon vieux revival Final Fantasy VI comme il y a trente ans (aïe, ça ne me rajeunit guère, tout ça) me conviendra très bien). Bon, trêve de plaisanteries, voici les énoncés qui, sous leurs atours festifs, cachent tout de même de vraies mathématiques, presque aussi intéressantes qu'un bon cours sur les espaces vectoriels topologiques (un tel cours peut-il de toute façon être mauvais?).

Le père fouettard Roupoil.

Énigme 1 : le calendrier de l'Avent.

Pour mon calendrier de l'Avent annuel, j'ai eu droit à une disposition amusante des cases en serpent (cf dessin ci-dessous). Comme je suis gourmand, mon calendrier comporte 25 cases (une pour le jour de Noël) au lieu des 24 traditionnelles. Mais surtout, comme je suis un matheux, mon calendrier a une propriété fort amusante : la somme des nombres inscrits sur deux cases voisines est toujours un carré parfait ! Saurez-vous compléter les numéros des cases effacées dans l'exemplaire ci-dessous (bien entendu, chaque jour doit apparaître une et une seule fois dans le calendrier) ? Et pour les plus motivés d'entre vous, si aucune case n'avait été préremplie, préciser le nombre total de possibilités pour remplir les 25 cases avec la condition imposée (on a le droit de faire un peu de Python pour cette question bonus).

			20	
13				
				10

Énigme 2 : l'âge du père Noël.

Comme chacun sait, notre grand ami le père Noël est assez âgé. Tout le monde a également bien conscience que le père Noël est quelqu'un d'**amical** et d'**heureux**. Ce qu'on sait moins, par contre, c'est qu'il est aussi **brésilien** (oui, je sais, lapon aurait été plus logique pour cette énigme, mais je n'y peux rien, la notion de « nombre entier lapon » n'a pas encore été inventée)! Sachant que son âge actuel est impair, saurez-vous retrouver l'âge du père Noël (qui est donc, à l'image de son possesseur, un nombre entier à la fois **amical**, **heureux** et **brésilien**, définitions trouvables sans difficulté sur Wikipedia)? On prendra le plus petit entier convenable comme solution de cette énigme (ce qui lui fait déjà un âge extrêmement respectable, puisqu'on devrait dépasser le Jeanne Calment au carré!).

Énigme 3 : le repas de Noël du pôle Nord.

Pour fêter dignement le dernier repas avant la tournée des cadeaux, le père Noël a préparé une belle table ronde (avec des bottes de carottes bien fraîches en son centre) pour ses huit rennes (Comète, Cupidon, Danseuse, Éclair, Fringant, Furie, Tonnerre et Tornade, pour ceux qui auraient des lacunes en Noëlologie). Les rennes s'assoient de façon totalement aléatoire autour de la table. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir (on considère que deux positions sont identiques si chacun des huit rennes a les deux mêmes voisins dans les deux positions, même si tout le monde n'est pas assis à la même place).

À une table ronde voisine (légèrement plus grande), ce sont les 42 lutins du père Noël qui s'assoient aléatoirement. De combien de façons ces derniers peuvent-ils s'asseoir?

Énigme 4 : les sapins de Noël.

Alors que je suis chez le vendeur de sapins, plongé en pleine réflexion pour choisir le plus beau spécimen à installer au fond de la salle D106, je me rends compte d'une chose fort amusante : je suis installé devant une rangée de 10 sapins parfaitement alignés, qui ont tous une taille différente : l'un fait 1 mètre, un deuxième fait 2 mètres, et ainsi de suite jusqu'à 10 mètres (les chiffres peu crédibles n'ont aucune importance). Depuis le bout de la rangée, je ne peux voir un sapin que s'il n'est pas caché par un sapin plus grand qui se trouverait devant lui (ainsi, si les dix sapins sont rangés par ordre croissant, je les vois tous, mais s'ils sont classés par ordre décroissant, je ne vois que le sapin de 10 mètres qui cache tous les autres). La rangée de sapins étant classée dans un ordre parfaitement aléatoire (même probabilité pour chaque classement possible), quelle est la probabilité que je puisse voir tous les sapins sauf 2? Et quel est, en moyenne, le nombre de sapins que je peux voir?

Pour les plus courageux, même question avec une rangée de 42 sapins ayant bien entendu 42 tailles toutes différentes.

Énigme 5 : pour terminer, un bon dessert!

Vous avez digéré les quatre énigmes précédentes? Alors terminons avec une petite douceur : pour son repas de Noël, le vieux barbu a préparé pour ses rennes et ses lutins (cf énigme 3) un magnifique gâteau en forme d'étoile! Oui, oui, une belle étoile à cinq branches tout ce qu'il y a de plus banale (comme je suis vraiment gentil, pour cette dernière énigme, je ne tenterai pas la généralisation avec une étoile à 42 branches, car je dois honnêtement avouer que je ne suis pas certain d'arriver à faire le calcul moi-même). Ce superbe gâteau est recouvert d'un glaçage pour le rendre encore plus spectaculaire. Ou plutôt, de deux glaçages : un glaçage à la carotte recouvre le pentagone central de l'étoile (pour faire plaisir aux rennes), alors qu'un glaçage camembert-NutellaTM recouvre chacune des branches (oui, les lutins ont des goûts un peu discutables). Quel est le rapport entre la surface du gâteau recouverte de glaçage camembert-Nutella, et celle recouverte de glaçage à la carotte?