Devoir Maison n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 décembre 2023

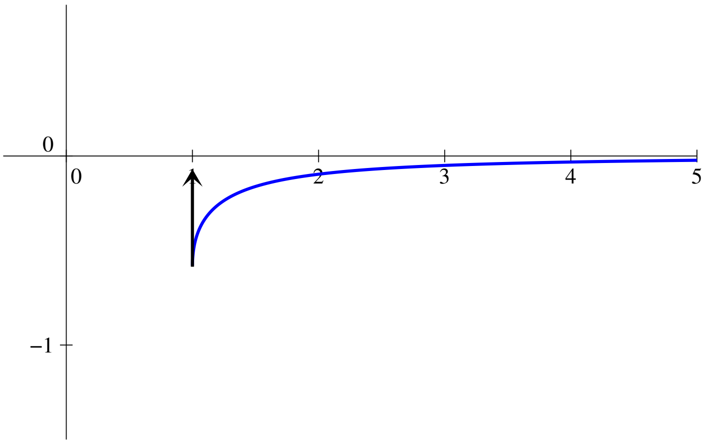
Exercice 1

1. C'est une inégalité très classique qu'on peut démontrer de plein de façons différentes. Une parmi d'autres : on veut montrer que $2\sqrt{ab} \leqslant a+b$, comme tout est positif, on peut élever au carré pour obtenir l'inégalité équivalente $4ab \leqslant (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Autrement dit, on veut montrer que $a^2 = b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai.
2. La fonction f_n est définie si chacune des racines carrées de la somme existe, donc si $x + k \geqslant 0$ pour tout entier k compris entre $= -n$ et n. La première condition $x - n \geqslant 0$ implique toutes les autres, donc $\mathcal{D}_{f_n} = [n, +\infty[$.
3. On a donc $f_1(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 3\sqrt{x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}$, avec $\mathcal{D}_{f_1} = [1, +\infty[$. On calcule sans difficulté $f_1(1) = 0 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} - 2$, mais la limite en $+\infty$ n'est pas évidente. Pour se rendre le calcul encore plus simple (et anticiper la généralisation à f_n), posons $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, et constatons que $f_1(x) = g(x) - g(x-1)$ (si vous n'êtes pas convaincus, vérifiez-le). Par ailleurs, via multiplication par la quantité conjuguée, $g(x) = \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ (plus de forme indéterminée). On en déduit aussi que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x-1) = 0$, et donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   Passons à l'étude des variations : f_1 est dérivable sur $]1, +\infty[$ (en 1, on aura sans surprise une tangente verticale), et $f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Posons $a = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. D'après la question 1, on a $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$. Or, $x^2 - 1 \leqslant x^2$ (et tout est positif sur l'intervalle de définition de f_1), donc $\sqrt[4]{x^2-1} \leqslant \sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$. Finalement, on déduit de tous ces calculs que $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, puis en combinant avec la minoration précédente que $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, et donc que $f_1'(x) \geqslant 0$. La fonction f_1 est donc croissante sur son intervalle de définition $[1, +\infty[$.

   Je sens que vous allez râler si je tente d'étudier la convexité de la fonction, alors on s'en tiendra là. À propos de convexité, une remarque quand même : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est convexe (calcul facile de dérivée seconde). Or, pour une fonction g convexe, on a toujours $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{g(x)+g(y)}{2}$ (c'est lié au fait qu'une courbe convexe est située sous ses cordes, faites un dessin pour vous en convaincre). Appliquée à $x+1$ et $x-1$, cela donne exactement $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, une façon élégante d'obtenir le signe de f_1'.

   La courbe ne présente pas le moindre intérêt :



4. Partons du résultat : $\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{x+k}+\sqrt{x-k}-2\sqrt{x}) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{x+k}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x-k}-2n\sqrt{x}$ (ici, le dernier terme est en-dehors de la somme, d'où le facteur n qui est apparu). On effectue dans le deuxième somme le changement d'indice $j=-k$ (techniquement, ce n'est pas vraiment un changement autorisé, on fait notamment attention au fait que ça inverse le sens de parcours de la somme, qu'il faut remettre « à l'endroit ») pour obtenir $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x+k}+\sum_{j=-n}^{-1}\sqrt{x+k}-2n\sqrt{x}$. En regroupant les deux sommes, il manque le terme d'indice 0 égal à $\sqrt{x}$, qu'on peut compenser en le soustrayant pour obtenir $-(2n+1)\sqrt{x}$, et on retrouve bien la forme initiale de $f_n(x)$.
5. Même technique que pour f_1 : on pose $g(x)=\sqrt{x+k}-\sqrt{x}$, de façon à avoir $g(x)-g(x-k) = \sqrt{x+k}+\sqrt{x-k}-2\sqrt{x}$, puis on multiplie par la quantité conjuguée : $g(x)=\dfrac{k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}$, qui a une limite nulle en $+\infty$. Chaque terme de la somme définition $f_n(x)$ tend donc vers 0 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.
6. C'est en fait essentiellement trivial : puisque $k\leqslant n$, $\sqrt{n+k}\leqslant\sqrt{2n}$ et $\sqrt{n-k}\leqslant\sqrt{n}$ (si $k\geqslant 0$, sinon on inverse simplement le rôle de k et de $-k$, ce qui ne changera rien une fois qu'on va additionner les deux majorations), donc $\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}+2\sqrt{n}\leqslant\sqrt{2n}+\sqrt{n}+2\sqrt{n}=(\sqrt{2}+3)\sqrt{n}$. De plus, $\sqrt{n^2-k^2}\leqslant\sqrt{n^2}=n$, donc $\sqrt{n^2-k^2}+n\leqslant 2n$. On fait le produit (tout est positif) : $(\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}+2\sqrt{n})(\sqrt{n^2-k^2}+n)\leqslant 2(\sqrt{2}+3)n\sqrt{n}$, et le passage à l'inverse change le sens de l'inégalité.
7. À coups de quantités conjuguées, $\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}-2\sqrt{n}=\dfrac{(\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k})^2-4n}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}+2\sqrt{n}}$ $=\dfrac{2\sqrt{n^2-k^2}-2n}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}+2\sqrt{n}}=\dfrac{2(n^2-k^2-n^2)}{(\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}+2\sqrt{n})(\sqrt{n^2-k^2}+n)}$. D'après la question précédente, cette expression est inférieure (avec le facteur négatif $-2k^2$ au numérateur) à $-\dfrac{k^2}{(\sqrt{2}+3)n\sqrt{n}}$. En particulier, $f_n(n)$ est une somme de termes négatifs dont l'un (celui obtenu pour $k=n$ est plus petit que $-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}+3}$, ce qui prouve la majoration demandée. On notera que cette majoration est minable, et aurait pu être obtenue beaucoup plus rapidement (le cas $k=n$ dans la question précédente étant assez facile à traiter...).
8. La dérivée de $x\mapsto\sqrt{x+k}+\sqrt{x-k}-2\sqrt{x}$ est donnée par l'expression $\dfrac{1}{2\sqrt{x+k}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}-1\sqrt{x}$. Or, en exploitant la première question comme ci-dessus, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{x+k}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-k}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. La dérivée de f_n est donc une somme de termes tous positifs, la fonction f_n est croissante sur $[n,+\infty[$.

Exercice 2

1. On a donc $b_0 = a_0$, puis $b_1 = a_0 + a_1$, $b_2 = a_0 + 2a_1 + a_2$ et enfin $b_3 = a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3$. Pas vraiment besoin de résoudre le système par les méthodes habituelles, il se remonte immédiatement : $a_0 = b_0$, puis $a_1 = b_1 - a_0 = b_1 - b_0$, $a_2 = b_2 - a_0 - 2a_1 = b_2 - b_0 - 2(b_1 - b_0) = b_2 - 2b_1 + b_0$, et enfin $a_3 = b_3 - a_0 - 3a_1 - 3a_2 = b_3 - b_0 - 3(b_1 - b_0) - 3(b_2 - 2b_1 + b_0) = b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0$. On a bien l'impression que $a_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} b_i$ (sinon, on lit l'énoncé de la question suivante pour trouver l'inspiration).

2. Calculons donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a_i$. Or, $\displaystyle\binom{k}{j}\binom{j}{i} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \times \frac{j!}{i!(j-i)!} = \frac{k!}{i!(j-i)!(k-j)!} = \frac{k!}{i!(k-i)!} \times \frac{(k-i)!}{(k-j)!(j-i)!} = \binom{k}{i} \times \binom{k-i}{k-j}$. On peut donc réécrire notre somme sous la forme $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{k-j} \binom{k}{i} \binom{k-i}{k-j} a_i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k-i}{k-j}$. En faisant un changement d'indice (décalage des indices de i vers le bas), la somme intérieure vaut $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-i} (-1)^{k-j-i} \binom{k-i}{k-i-j}$. En la réécrivant dans l'ordre habituel, cette dernière somme est en fait égale à $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-i} (-1)^{j} \binom{k-i}{j} = (-1+1)^{k-i}$ (binôme de Newton). Autrement dit, la somme est nulle pour tous les indices i différents de k, et elle vaut 1 lorsque $i = k$. Le seul terme restant de la somme extérieure initiale est donc celui d'indice k, qui vaut $\displaystyle\binom{k}{k} a_k = a_k$, ce qui prouve la formule d'inversion de Pascal.

3. (a) Par définition, on a $\delta^0 y_0 = 3$, $\delta^0 y_1 = -2$, $\delta^0 y_2 = 1$ et $\delta^0 y_3 = 5$.
   Ensuite, $\delta^1 y_0 = -2 - 3 = -5$, $\delta^1 y_1 = 1 + 2 = 3$ et $\delta_1 y_2 = 5 - 1 = 4$.
   On continue : $\delta^2 y_0 = 3 + 5 = 8$, $\delta^2 y_1 = 1$ et enfin $\delta^3 y_0 = -7$.
   On peut effectivement présenter les choses comme une espèce de « triangle de Pascal » avec des différences au lieu des sommes.

   (b) On calcule $\delta^3 y_2 = \delta^2 y_3 - \delta^2 y_2 = \delta^1 y_4 - 2\delta^1 y_3 + \delta^1 y_2 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$. De même, on obtient par un calcul sans intérêt $\delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$. On reconnaît bien sûr là-dedans des choses remarquables.

   (c) Il suffit de vérifier que les valeurs coïncident pour les entiers compris entre 0 et n pour que la fonction f soit solution du problème, mais il faudra aussi vérifier que c'est bien celle de plus petit degré. Commençons par regarder un peu plus attentivement à quoi ressemblent les termes de la somme : pour $k = 0$, le produit au numérateur et vide et vaut donc 1. Autrement dit, le premier terme de la somme est égal à $\delta^0 y_0 = y_0$. Le terme suivant vaut $\delta^1 y_1 x$, celui d'après $\delta^2 y_2 \dfrac{x(x-1)}{2}$, et ainsi de suite. Manifestement, tous les termes sauf le premier s'annulent pour $x = 0$, donc $f(0) = y_0$ (ça tombe bien, c'est ce qu'on voulait). Tous les termes sauf les deux premiers s'annulent pour $x = 1$, donc $f(1) = y_0 + \delta^1 y_0 = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1$, ça va encore. Tous les termes sauf les trois premiers s'annulent pour $x = 2$, donc $f(2) = y_0 + 2\delta^1 y_0 + \delta^2 y_0 = y_0 + 2(y_1 - y_0) + y_2 - 2y_1 + y_0 = y_2$. Bon, reste à faire un raisonnement plus général : pour $x = i$ (avec $i \leqslant n$), seuls les $i + 1$ premiers termes de la somme sont non nuls, et le numérateur du terme d'indice k vaut alors $i(i-1)\dots(i-k+1) = \dfrac{i!}{(i-k)!}$, donc $f(i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \delta^k y_0 \binom{i}{k}$. Autrement dit, la suite des $f(i)$ est la suite des b_k associée à celle des $a_k = \delta^k y_0$ par la formule donnée en début de problème. Or, on a $\delta^k y_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i$ (c'est la constatation faite à la question précédente, on le démontre par récurrence sur k sans grande difficulté : pour $k = 0$, c'est trivial, pour $k = 1$ c'est la définition de $\delta^1 y_0$, et si on suppose la formule vérifiée au rang k, alors $\delta^{k+1}y_0 = \delta^k y_1 - \delta^k y_0 = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_{i+1} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_i = \sum_{i=1}^{k+1}-(-1)^{k-i}\binom{k}{i-1}y_i - \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}y_i = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}y_i$ en appliquant la relation de Pascal et en constaatant que les termes extrêmes s'insèrent bien dans la nouvelle somme, « façon binôme de Newton »). On en déduit que $b_k = y_k$, donc qu'on a bien $f(i) = y_i$ pour tout entier $i \in \{0, \dots, n\}$. Comment peut-on être sûr qu'on ne peut pas obtenir une fonction de degré plus petit que la fonction f obtenue, qui est de degré n (les termes de la somme sont de degré de plus en plus grand, aucune simplification des termes de plus haut degré n'est donc possible) ? Supposons qu'il existe une fonction g autre solution de degré (inférieur ou égal à) n. Alors $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ est une fonction de degré inférieur ou égal à n qui s'annule pour tous les entiers i compris entre 0 et n, et qui a donc $n+1$ valeurs d'annulation. On démontrera bientôt rigoureusement en cours qu'un polynôme de degré n ne peut pas s'annuler plus de n fois, sauf s'il s'agit du polynôme nul. On a donc $g(x) = f(x)$, ce qui prouve que f est en fait l'unique fonction de degré inférieur ou égal à n convenable.

(d) Trichons un peu : on sait que la fonction f va être de degré 3. On veut donc simplement interpoler $y_0 = \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0$, $y_1 = \sum_{i=0}^{1} i^2 = 1$, $y_2 = \sum_{i=0}^{2} i^2 = 5$ et $y_3 = \sum_{i=0}^{3} i^2 = 14$. On calcule alors $\delta^1 y_0 = 1$, $\delta^2 y_0 = 5 - 2 = 3$ et $\delta^3 y_0 = 14 - 15 + 3 = 2$, puis $f(x) = y_0 + \delta^1 y_0 x + \delta^2 y_0 \frac{x(x-1)}{2} + \delta^3 y_0 \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = x + \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{2x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{x(6 + 9x - 9 + 2x^2 - 6x + 4)}{6} = \frac{x(2x^2 + 3x + 1)}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$. On retrouve bien entendu la formule bien connue pour la somme des carrés des entiers.

(e) On fait pareil, en admettant qu'on doit obtenir un polynôme de degré 5 : $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 17$, $y_3 = 1 + 16 + 81 = 98$, $y_4 = 98 + 256 = 354$ et $y_5 = 354 + 625 = 979$. On en déduit brillamment que $\delta^1 y_0 = 1$ (si on fait tout le tableau, la ligne des δ^1 contient simplement les puissances quatrièmes des entiers ici), puis $\delta^2 y_0 = 16 - 1 = 15$, $\delta^3 y_0 = 81 - 2 \times 16 + 1 = 50$, $\delta^4 y_0 = 256 - 3 \times 81 + 3 \times 16 - 1 = 60$ et $\delta^5 y_0 = 625 - 4 \times 256 + 6 \times 81 - 4 \times 16 + 1 = 24$. Allez, un dernier petit calcul et on s'en va (une ignoble contrepèterie est cachée dans cette phrase) : $f(x) = x + \frac{15x(x-1)}{2} + \frac{50x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{60x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} + \frac{24x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120} =$

$$\frac{x(30 + 225x - 225 + 250x^2 - 750x + 500 + 75x^3 - 450x^2 + 825x - 450 + 6x^4 - 60x^3 + 210x^2 - 300x + 144)}{30}$$

$$= \frac{x(6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1)}{30} = \frac{x(x+1)(6x^3 + 9x^2 + x - 1)}{30} = \frac{x(x+1)(2x+1)(3x^2 + 3x - 1)}{30},$$

ce qui est bien la formule « connue » pour $\sum_{x=0}^{n} x^4$. Mais soyons honnêtes, autant la factorisation par $x = 1$ du numérateur est trouvable (-1 est racine évidente), autant la dernière est quasiment impossible à faire puisqu'on ne peut pas vraiment dire que $-\frac{1}{2}$ soit une racine facile à visualiser.