

Devoir Maison n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

7 novembre 2023

I. Étude de la convergence de la suite $(e_n(x))$.

1. Pour $x = 0$, la suite $(e_n(x))$ est constante égale à 1, et converge donc trivialement vers $e(0) = 1$.
2. Calculons donc : $e_0(1) = 1$ (c'est d'ailleurs le cas pour tout réel x), puis $e_1(1) = 2^1 = 2$, $e_2(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ et $e_3(1) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$. La suite semble croissante, et c'est à peu près tout ce qu'on peut conjecturer à ce stade (bien sûr, le thème du problème fait qu'on se doute que ça doit converger vers l'exponentielle du nombre 1, donc vers e , mais les premières valeurs sont encore loin de la limite).

3. (a) Commençons déjà par constater que la formule est correcte si $y = 1$, seule valeur pour laquelle on ne peut pas appliquer le formule de calcul des sommes géométriques. En effet, si $y = 1$, le membre de gauche de l'égalité vaut 0 (on additionne que des nombres égaux à 0), et celui de droite aussi puisqu'il y a un facteur $y - 1$ devant les sommes. Dans le cas général, calculons en deux temps le membre de droite, en commençant par la somme intérieure :
$$\sum_{j=0}^{k-1} y^j = \frac{y^k - 1}{y - 1}$$
. Après simplification, le membre de droite vaut donc $\sum_{k=1}^{n-1} (y^k - 1)$. Il manque le terme numéro 0 pour que l'égalité soit vérifiée ? Aucun problème puisqu'il vaut 0.

- (b) Dans la fomule précédente, le membre de droite est évidemment du signe de $y - 1$ (puisque les sommes sont constituées uniquement de termes positifs). Supposons par exemple $y > 1$,

alors on en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} (y^k - 1) > 0$, soit (en calculant simplement la somme de gauche,

toujours à l'aide de la formule donnée dans l'énoncé) $\frac{y^n - 1}{y - 1} - n > 0$ (le -1 dans la somme est additionné n fois puisqu'il y a n termes dans une somme dont les indices varient entre 0 et $n - 1$). Autrement dit, $\frac{y^n - 1}{y - 1} > n$, puis $y^n - 1 > n(y - 1)$ (par hypothèse, $y - 1 > 0$), soit exactement ce qu'on voulait démontrer. Si $y < 1$, on procède de même, le membre de gauche est strictement négatif, mais la multiplication finale par $y - 1$ change le sens de l'inégalité et on arrive au même résultat.

- (c) On pose simplement $y = x + 1$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne bien $(x + 1)^n - 1 - nx \geq 0$ pour tout $x \geq -1$ (puisque y doit être positif). Pour qu'il s'agisse d'une égalité, comme vu dans le raisonnement de la question précédente, on doit avoir $y = 1$, donc $x = 0$ (dans ce cas l'égalité est triviale).

4. (a) Si $n \geq n_x$, on aura $|x| < n$ (par définition de n_x , et étant donné que $x < \text{Ent}(x) + 1$ pour tout réel x), donc $\frac{x}{n} \in]-1, 1[$. Dans ce cas, $1 + \frac{x}{n} > 0$, donc $e_n(x) > 0$.

- (b) Puisqu'on sait que les termes de la suite correspondants sont strictement positifs, on peut s'intéresser à la valeur de $\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$. La frac-

tion dans la parenthèse peut s'écrire $\frac{n(n+1) + nx}{n(n+1) + (n+1)x} = 1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}$, superbe nombre qu'on va noter α . Ce nombre α étant positif, on peut lui appliquer l'inégalité de Bernoulli pour affirmer que $\alpha^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha = 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}$. En reprenant le calcul initial, on a donc $\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times \frac{n}{n+x} = 1$. Cela prouve exactement que la suite est croissante (à partir du rang n_x).

5. (a) Avec l'hypothèse $n \geq n_x$, $1 - \frac{x}{n} > 0$, et le calcul de la question précédente prouve que $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ est croissant (toujours à partir du rang n_x . Comme $v_n(x)$ est l'inverse d'une suite strictement positive et croissante, elle est donc décroissante.

(b) Tout étant positif, l'inégalité de droite demandée revient à prouver que $1 - \frac{e_n(x)}{v_n(x)} \leq \frac{x^2}{n}$, donc que $\frac{e_n(x)}{v_n(x)} \geq 1 - \frac{x^2}{n}$. Or, $\frac{e_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$. Comme $1 - \frac{x^2}{n^2} \geq 0$ l'hypothèse $|x| \leq n$ implique que $x^2 \leq n^2$, on peut appliquer l'inégalité de Bernoulli pour obtenir $\frac{e_n(x)}{v_n(x)} \geq 1 - n \times \frac{x^2}{n^2} = 1 - \frac{x^2}{n}$, exactement ce qu'on voulait. Pour l'inégalité de gauche, on part simplement du fait que $\frac{e_n(x)}{v_n(x)} < 1$ (ce qui est évident vu le calcul effectué juste avant), donc $e_n(x) < v_n(x)$.

(c) On vient de prouver que $e_n(x) \leq v_n(x)$, avec $(v_n(x))$ qui est une suite décroissante, donc majorée par son premier terme. La suite $(e_n(x))$ est donc croissante (à partir d'un certain rang) et majorée, elle converge.

II. Étude de la fonction e .

1. On a vu dans la première partie que la suite $(e_n(x))$ était strictement positive à partir d'un certain rang, ce qui assure que sa limite est positive **ou nulle**. Mais comme elle est également croissante à partir de ce même rang, elle en fait minorée par son terme d'indice n_x , lui-même strictement positive, et sa limite est donc supérieure ou égale à cette valeur strictement positive. Autrement dit, $e(x)$ est en effet strictement positif.

2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Quitte à considérer des entiers n supérieurs à la fois à n_x et à n_y (ce qui sera le cas à partir d'un certain rang, égal à $\max(n_x, n_y)$), on aura $0 < 1 + \frac{x}{n} < 1 + \frac{y}{n}$, donc $e_n(x) < e_n(y)$. Les deux suites étant convergentes, on peut passer à la limite pour en déduire que $e(x) \leq e(y)$.

De plus, $\frac{e_n(y)}{e_n(x)} = \left(\frac{1 + \frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{n+y}{n+x}\right)^n = \left(1 + \frac{y-x}{n}\right)^n$. Si on suppose toujours $x < y$,

on applique l'inégalité de Bernoulli : $\frac{e_n(y)}{e_n(x)} \geq 1 + y - x$, donc en passant à la limite $e(y) \geq (1 + y - x)e(x)$, ce qui interdit d'avoir $e(y) = e(x)$ puisque $1 + y - x > 1$ par hypothèse. La fonction est donc bien strictement croissante.

3. Au moins à partir du rang n_x , on peut appliquer l'inégalité de Bernoulli pour obtenir $e_n(x) \geq 1 + n \times \frac{x}{n} = 1 + x$. Par passage à la limite, on en déduit directement que $e(x) \geq 1 + x$. De plus, l'encadrement de la question I.5.b montre que $e_n(x) \leq v_n(x) \leq e_n(x) + v_n(x) \times \frac{x^2}{n}$. La suite $(v_n(x))$ étant bornée (elle est décroissante et positive à partir d'un certain rang), $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \times \frac{x^2}{n} = 0$ (bien entendu, x est une constante fixée dans ces calculs).

Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement précédent permet alors d'affirmer que $(v_n(x))$ converge et a la même limite $e(x)$ que $(e_n(x))$. Or, toujours à l'aide de l'inégalité de Bernoulli, $\frac{1}{v_n(x)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 - x$, donc $v_n(x) \geq \frac{1}{1-x}$ (tout est positif pour $n \geq n_x$, condition sous laquelle $v_n(x)$ est défini, à condition bien sûr d'avoir $1 - x > 0$, donc $x < 1$). C'est exactement la deuxième inégalité souhaitée.

4. Si $x = 0$, la propriété est évidente puisqu'on a vu au tout début du problème que $e(0) = 1$. Sinon, on constate simplement que $v_n(x) = \frac{1}{e_n(-x)}$. Comme $(v_n(x))$ converge vers $e(x)$ et $(e_n(-x))$ converge vers $e(-x)$ (qui n'est jamais nul, donc le passage à l'inverse ne posera pas de problème), un passage à la limite donne la relation $e(x) \times \frac{1}{e(-x)} = 1$, soit $e(x) \times e(-x) = 1$.
5. (a) L'inégalité est évidente si $x = 0$ (les deux membres de l'inégalité sont alors nuls puisque $e_n(0)$ est toujours égal à 1). Si on suppose $x > 0$, alors $e_n(x) > 1$ et l'inégalité à démontrer peut s'écrire sans valeur absolue : $e_n(x) - 1 \leq \frac{x}{1-x}$, soit $e_n(x) \leq 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$. On a déjà démontré cette majoration à la question 3. Si au contraire $x < 0$, la valeur absolue du dénominateur du membre de droite est assez clairement une faute de frappe dans l'énoncé (comparer avec la question III.2), on va faire la démonstration sans cette valeur absolue. Cette fois-ci, $|x| = -x$ et $e_n(x) < 1$, donc il faut prouver que $1 - e_n(x) \leq \frac{-x}{1-x}$, soit $e_n(x) \geq 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$. On retombe donc sur la même chose que dans le cas où $x > 0$. Notons quand même qu'on peut toujours conserver l'énoncé tel quel puisque, si $x < 0$, $1 - |x| = 1 + x < 1 - x$, donc $\frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-|x|}$ (tout est positif tant que $x > -1$), la majoration prouvée est donc meilleure que celle demandée dans l'énoncé.
- (b) Si (u_n) a une limite nulle, alors $u_n \in]-1, 1[$ à partir d'un certain rang, et on peut appliquer la question précédente : $0 \leq |e_n(u_n) - 1| \leq \frac{|u_n|}{1-|u_n|}$. La limite du membre de droite de cet encadrement étant nulle, le théorème des gendarmes donne directement $\lim_{n \rightarrow +\infty} |e_n(u_n) - 1| = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(u_n) = 1$.
- (c) Voilà un « en déduire » franchement abusif car la question est loin d'être simple, et surtout, le lien avec la précédente n'est pas franchement immédiat. Calculons donc brutalement $\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} = \left(\frac{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \left(\frac{(n+x)(n+y)}{n^2+n(x+y)}\right)^n = \left(\frac{n^2+nx+ny+xy}{n^2+nx+ny}\right)^n = \left(1 + \frac{xy}{n(n+x+y)}\right)^n = e_n\left(\frac{xy}{n+x+y}\right)$. À x et y fixés, $\frac{xy}{n+x+y}$ tend vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n\left(\frac{xy}{n+x+y}\right) = 1$ (oui, on utilise quand même la question précédente). On a donc prouvé que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} = 1$. Or, ce quotient a pour limite $\frac{e(x)e(y)}{e(x+y)}$, ce qui prouve donc que $e(x)e(y) = e(x+y)$.

III. Limites et dérivée de la fonction e .

1. (a) À l'aide de la dernière formule démontrée dans la partie précédente, on prouve facilement par récurrence que, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e(kx) = (e(x))^k$ (c'est triviale pour $k = 0$ puisque $e(0) = 1$, et si on suppose la formule vraie au rang k , alors $e((k+1)x) = e(kx+x) = (e(x))^k \times e(x) = (e(x))^{k+1}$). Or, la fonction e étant strictement croissante, on a par exemple $e(1) > e(0) = 1$, donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (e(1))^k = +\infty$. Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, quel que soit l'entier k fixé, on aura $u_n > k$ à partir d'un certain rang, donc $e(u_n) > e(k)$ à

partir de ce même rang (croissance de la fonction e). On vient donc de démontrer que $e(u_n)$ peut être rendu, à partir d'un certain rang, plus grand qu'une constante arbitrairement grande fixée à l'avance, ce qui par définition signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e(u_n) = +\infty$.

Autre rédaction possible, qui est en fait beaucoup plus rapide : $e(u_n) \geq 1 + u_n$ (question II.3), ce qui suffit à conclure directement.

- (b) Cela revient exactement à chercher la limite de $(e(v_n))$ quand (v_n) est une suite tendant vers $-\infty$. Par le même raisonnement que ci-dessus, si k est un entier naturel, $e(-k) = (e(-1))^k$, avec $0 < e(-1) < e(0) = 1$, donc $e(-k)$ a une limite nulle quand k tend vers $+\infty$. On peut donc, de façon similaire à la question précédente, rendre $e(v_n)$ aussi proche de 0 qu'on le souhaite (à partir d'un certain rang), ce qui prouvera que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e(v_n) = 0$.

Pour une rédaction vraiment impeccable de ce genre de question, avec des ε dans tous les sens, on attendra d'avoir fait le chapitre sur les suites.

- (c) Fixons donc un entier $m \in \mathbb{N}$, et constatons que, si $x > 0$, $e_{m+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^{m+1} > \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$. A fortiori, puisque la suite $(e_n(x))$ est croissante quand $x > 0$, on aura donc $e(x) \geq \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{m+1}}$, donc $\frac{e(x)}{x^m} \geq \frac{x}{(m+1)^{m+1}}$. Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, elle finira par ne prendre que des valeurs positives, donc on aura à partir d'un certain rang $\frac{e(u_n)}{u_n^m} \geq \frac{u_n}{(m+1)^{m+1}}$, ce qui suffit à assurer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e(u_n)}{u_n^m} = +\infty$ (la valeur de $(m+1)^{m+1}$ étant une constante fixée dès qu'on a imposé l'entier m). Une belle façon de démontrer des résultats classiques de croissance comparée !

2. L'énoncé aurait bien sûr du interdire la valeur 0 pour cette nouvelle majoration. Si $0 < x < 1$, $e_1(x) = 1 + x$, donc $\frac{e_1(x) - 1}{x} - 1 = 0$. La croissance de la suite $(e_n(x))$ permet alors d'affirmer que le membre de gauche de notre inégalité est positif. On cherche donc à prouver que $\frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$, ou encore que $e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}$ (on peut multiplier par x qui est positif). Ça tombe bien, on l'a déjà fait en question II.5.a. Le cas où $x < 0$ se traite de la même façon, les signes changent à gauche (car $\frac{e(x) - 1}{x} - 1 < 0$ dans ce cas) et à droite, et on retrouve à nouveau la même inégalité qu'à la question II.5.a.
3. Notre valeur absolue étant certainement positive, une application évidente du théorème des gendarmes permet d'affirmer que cette limite est égale à 1.
4. En exploitant la formule de la question II.5.c, on écrit simplement $\frac{e(a+x) - e(a)}{x} = \frac{e(a)e(x) - e(a)}{x} = e(a) \times \frac{e(x) - 1}{x}$, qui a pour limite $e(a)$ quand x tend vers 0 d'après la question précédente. On a bien prouvé que $e'(a) = e(a)$.

IV. Lien avec les séries.

1. L'énoncé de cette question est inutilement tordu, il suffit bien sûr de prouver que $e_n(x) \leq w_n(x) \leq e_{n+1}(x)$ (la croissance de $(e_n(x))$ permettant ensuite de remplacer le majorant par n'importe quel $e_{n+p}(x)$ pour $p \geq 1$). On va procéder par récurrence. Pour $n = 0$, $e_0(x) = 1$, $w_0(x) = 1$ et $e_1(x) = 1 + x$, donc l'encadrement $1 \leq 1 \leq 1 + x$ semble assez vrai. Supposons désormais qu'on a $e_n(x) \leq w_n(x) \leq e_{n+1}(x)$ pour un certain entier n et pour tout $x > 0$. Posons alors $f(x) = w_{n+1}(x) - e_{n+1}(x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et $f'(x) = w'_{n+1}(x) - e'_{n+1}(x)$. Or, $w'_{n+1}(x) = w_n(x)$ (calcul normalement assez immédiat), et $e'_{n+1}(x) = (n+1) \times \frac{1}{n+1} \times \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^n < e_n(x)$ (on élève un nombre

plus petit à la même puissance). On en déduit que $f'(x) \geq w_n(x) - e_n(x) \geq 0$ par hypothèse de récurrence. La fonction f est donc croissante, et elle vérifie $f(0) = 0$ (pour $x = 0$, on a toujours $e_n(0) = w_n(0) = 1$), donc elle est positive sur $[0, +\infty[$, ce qui prouve l'inégalité $e_{n+1}(x) \leq w_{n+1}(x)$. On procède de même pour la deuxième inégalité.

2. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(x) = e(x)$, mais aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_{n+1}(x) = e(x)$ (on décale simplement les indices, la limite ne va pas changer). L'encadrement de la question précédente permet donc d'appliquer une nouvelle fois le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(x) = e(x)$.
3. En développant brutalement $e_n(x)$ (sous forme d'un polynôme de degré n en la variable x), les expressions de $w_n(x) - e_n(x)$ et de $w_n(|x|) - e_n(|x|)$ sont des polynômes ayant les mêmes coefficients, aux signes des puissances de x près. Quand x est positif, l'écart est donc la somme de tous ces termes, alors qu'il peut se produire des compensations quand x est négatif, pour un écart absolu nécessairement plus petit. Bien sûr, cette démonstration n'est guère rigoureuse, mais on manque d'outils (binôme de Newton, manipulations de sommes) pour tout bien faire. Contentons-nous de regarder concrètement ce qui se passe pour une petite valeur de n . Non, pas trop petite quand même sinon ça n'a guère d'intérêt, on va prendre $n = 4$. Dans ce cas, $w_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$, et $e_4(x) = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2\right)^2 = 1 + x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{256}x^4$. On calcule donc brillamment $w_4(x) - e_4(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{48}x^3 + \frac{29}{768}x^4$. Si $x > 0$, pas besoin de valeur absolue, on additionne simplement ces trois termes. Si $x < 0$, le terme en x^3 sera négatif, et, pas inégalité triangulaire, on aura simplement $\left|\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{48}x^3 + \frac{29}{768}x^4\right| \leq \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + \frac{29}{768}x^4 = w_4(|x|) - e_4(|x|)$.
4. Puisque $|x| \geq 0$, la question 2 montre que le membre de droite de la majoration précédent tend vers 0, donc celui de gauche aussi (il est positif!), ce qui prouve la convergence de $w_n(x)$ vers $e(x)$ même quand $x \leq 0$.