Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 3

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 7 novembre 2023

Ce devoir à la maison propose une construction de la fonction exponentielle complètement diffférente de celle vue en cours, uniquement basée sur les propriétés des suites réelles (pas besoin de plus que le programme de Terminale concernant les suites). Il est bien sûr totalement interdit d'utiliser la moindre propriété des fonctions exponentielles ou logarithmes dans ce devoir. Quelques questions font intervenir des manipulations de sommes que nous reverrons en cours dans le chapitre 6, les résultats et notations utiles sont rappelés. On rappelle d'ailleurs qu'on note $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$ la somme $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, l'entier i (appelé indice de la somme) parcourant obligatoirement l'ensemble de tous les entiers compris entre l'indice initiale noté en-dessous de la somme, et l'indice final noté au-dessus de la somme.

Dans tout l'exercice, x étant un réel fixé, on pose $e_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, et on note E l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(e_n(x))$ converge. Si $x \in E$, on notera $e(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} e_n(x)$.

I. Étude de la convergence de la suite $(e_n(x))$.

1. Montrer que $0 \in E$ et déterminer la valeur de $e(0)$.
2. Calculer les valeurs de $e_n(1)$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Que peut-on conjecturer concernant la suite $(e_n(1))$?
3. On veut démontrer dans cette question l'inégalité de Bernoulli : $\forall x > -1, \forall k \in \mathbb{N}^*, (1+x)^k \geqslant 1+kx$.
   (a) Soit $y \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (y^k - 1) = (y-1) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} y^j \right)$.
   On rappelle la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ valable pour tout réel $q \neq 1$ (somme des termes d'une suite géométrique).
   (b) En déduire que $y^n - 1 - n(y-1) \geqslant 0$.
   (c) En déduire l'inégalité de Bernoulli, et préciser dans quels cas il s'agit d'une égalité.
4. Pour tout réel x, on note n_x l'entier qui vaut 1 si $x \geqslant 0$, et $\text{Ent}(|x|) + 1$ si $x < 0$.
   (a) Montrer que la suite $(e_n(x))$ est à valeurs strictement positives à partir du rang n_x.
   (b) Montrer que la suite $(e_n(x))$ est croissante à partir du rang n_x (on exploitera l'inégalité de Bernoulli).
5. On pose enfin, si $x \neq 0$, $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, pour tout entier $n \geqslant n_x$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n(x))$ est décroissante.
   (b) Montrer que, si $n \geqslant |x|$, $0 \leqslant v_n(x) - e_n(x) \leqslant v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.
   (c) En déduire que la suite $(e_n(x))$ converge quelle que soit la valeur de x.

II. Étude de la fonction e.

Puisqu'on sait désormais que $E = \mathbb{R}$, on peut définir une fonction e sur $\mathbb{R}$ par $e : x \mapsto e(x)$.

1. Montrer que la fonction e est à valeurs strictement positives.
2. Montrer que e est strictement monotone.

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e(x)$, et que, $\forall x < 1$, $e(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.
4. Montrer que $e(x) \times e(-x) = 1$ pour tout réel x.
5. (a) Montrer que, si $x \in]-1, 1[$, alors $|e_n(x) - 1| \leqslant \dfrac{|x|}{1-|x|}$.
   (b) En déduire que, si (u_n) est une suite de limite nulle, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(u_n) = 1$.
   (c) En déduire que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $e(x)e(y) = e(x+y)$.

III. Limites et dérivée de la fonction e.

1. Soit (u_n) une suite de réelle ayant pour limite $+\infty$.
   (a) Montrer que la suite $(e(u_n))$ admet une limite (à préciser) en $+\infty$.
   (b) Même question pour la suite $(e(-u_n))$.
   (c) Soit $m \in \mathbb{N}$, déterminer (si elle existe) la limite de $\left(\dfrac{e(u_n)}{u_n^m}\right)$.
2. Montrer que, si $x \in]-1, 1[$, $\left|\dfrac{e(x)-1}{x} - 1\right| \leqslant \dfrac{|x|}{1-x}$.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e(x)-1}{x}$. Ce calcul prouve que la fonction e est dérivable en 0, et que $e'(0) = 1$.
4. Montrer que la fonction e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $e' = e$ (on rappelle que e est dérivable en a si $\dfrac{e(a+x) - e(a)}{x}$ admet une limite quand x tend vers 0, et que cette limite est alors égale à $e'(a)$).

IV. Lien avec les séries.

On note dans cette dernière partie $w_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (pour tout réel x).

1. Montrer que $e_n(x) \leqslant w_n(x) \leqslant e_{n+p}(x)$ pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$.
2. En déduire que $(w_n(x))$ converge vers une valeur à préciser si $x > 0$.
3. Montrer que, si x est désormais un réel quelconque, $|w_n(x) - e_n(x)| \leqslant w_n(|x|) - e_n(|x|)$.
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n(x)$.