Devoir Maison n° 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 octobre 2023

Exercice 1 : quelques calculs algébriques.

1. On commence par écrire $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$, donc le nombre proposé est égal à $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$.
2. Comme on l'a vu récemment lors de nos petits calculs de lignes trigonométriques remarquables, un triangle équilatéral de côté a possède une hauteur égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (un petit coup de Pythagore pour le retrouver si nécessaire), donc une aire égale à $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Si le triangle a une aire de 1, son côté vérifie donc $a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$, soit $a = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, dont on déduit un périmètre égal à $3a = \frac{6}{3^{\frac{1}{4}}}$.
3. Une astuce consiste à élever au carré la deuxième équation : $a+b+c = 7$, donc $(a+b+c)^2 = 49$. Or, en développant comme des bourrins, $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. Comme par hypothèse $a^2+b^2+c^2 = 35$, on en déduit que $2ab+2bc+2ac = 49-35 = 14$, donc $ab+bc+ca = 7$.
4. On développe brutalement : $2\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + (a+b-1)^2 = 2a^2 - 2ab + \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a - 2b = 3a^2 + \frac{3}{2}b^2 - 2a - 2b + 1$. On peut s'amuser à mettre tout ça sous forme canonique mais ça n'a pas grand intérêt, c'est égal à $3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + 1 = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(b - \frac{2}{3}\right)^2$. Bon, c'est quand même un peu mieux.
5. Vous avez résolu l'équation ? Ça ne servait à rien, le fait que seules les puissances paires de x interviennent montrent que x est solution si et seulement si $-x$ est solution, donc la somme des solutions est nulle.
6. On constate « à la main » que le nombre $x-y$ semble être le carré de l'entier à n chiffres dont tous les chiffres sont égaux à 3. Notons donc $z_n = \underbrace{33\dots3}_{n \text{ chiffres}}$, $y_n = \underbrace{22\dots2}_{n \text{ chiffres}}$ et $x_n = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ chiffres}}$. On va prouver que $z_n^2 = x_n - y_n$ par récurrence. Pour $n = 1$, c'est assez facile : $z_1 = 3$, donc $z_1^2 = 9$, et $x_1 - y_1 = 11 - 2 = 9$. Supposons la formule vérifiée au rang n, on constate alors que $z_{n+1} = 3 \times z_n + 3$ (en gros, on ajoute un 0 en multipliant par 10, puis on ajoute 3 pour que le dernier chiffre devienne lui aussi égal à 3), donc $z_{n+1}^2 = (10z_n+3)^2 = 100z_n^2 + 60z_n + 9$. Appliquons l'hypothèse de récurrence pour obtenir $z_{n+1}^2 = 100x_n - 100y_n + 60z_n + 9$. Or, il est assez clair que $z_n = \frac{3}{2}y_n$, donc $60z_n = 60 \times \frac{3}{2}y_n = 90y_n$. On remplace dans l'équation précédente : $z_{n+1}^2 = 100x_n - 100y_n + 90y_n + 9 = 100x_n - 10y_n + 11 - 2$. Or, $100x_n + 11 = x_{n+1}$

et $10y_n + 2 = y_{n+1}$ (si, si, c'est évident). Miracle, on a alors $z_{n+1}^2 = x_{n+1} - y_{n+1}$, ce qui prouve l'hérédité et achève notre récurrence.

7. Supposons par l'absurde que chacun des trois nombres $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ soit strictement supérieur à $\frac{1}{4}$, alors leur produit $a(1-b)b(1-c)c(1-a)$ est certainement strictement supérieur à $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$. Or, on peut aussi écrire ce produit comme le produit des trois nombres $a(1-a)$, $b(1-b)$ et $c(1-c)$, autrement dit le produit de trois nombres de la forme $x(1-x)$, avec $x \geqslant 0$. Posons donc $f(x) = x - x^2$, la fonction f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $f'(x) = 1 - 2x$, et admet donc un maximum pour $x = \frac{1}{2}$, de valeur $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Autrement dit, si $x \geqslant 0$, on a toujours $f(x) \leqslant \frac{1}{4}$, ce qui prouve que $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant \frac{1}{4^3}$, et donc que notre hypothèse de départ était absurde.
8. La condition $2^z = 2^x$ impose déjà $z = x$ (les fonctions exponentielles sont toujours injectives). De même, la condition $e^x = y^{2x}$ impose $z = y^2$. On a donc $x = z = y^2$, et la dernière équation devient simplement $2y^2 + y = 10$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 80 = 81$, et qui admet pour racines $y_1 = \frac{-1-9}{4} = -\frac{5}{2}$ et $y_2 = \frac{-1+9}{4} = 2$. Le triplet de solutions constitué de $y = 2$ et $x = z = 4$ ne pose aucun problème, mais peut-on vraiment avoir $y = -\frac{5}{2}$ et $x = z = -\frac{25}{4}$? Non, car les valeurs de z^x et de y^{2x} n'existent alors pas. Il y a donc uns eul triplet de solutions.

Exercice 2 : des ensembles ordonnés.

On se contentera souvent dans cet exercice 2 d'explications intuitives plutôt que de démonstrations parfaitement rigoureuses, dans la mesure où les axiomes de construction des ensembles de nombres sont parfois nécessaires et n'ont pas été présentés clairement en cours.

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ ne peut sûrement pas être bien ordonné puisqu'il n'admet lui-même pas de minimum. Même chose pour $\mathbb{Z}$. Par contre, $\mathbb{N}$ est un ensemble bien ordonné, c'est même en fait l'un de ses axiomes fondateurs (tout ensemble d'entiers naturels non vide admet un plus petit élément). L'ensemble fini $\{\sqrt{2}, \pi, e, 42\}$ est lui aussi bien ordonné, il admet pour minimum $\sqrt{2}$, et il est facile d'extraire le minimum de chacun de ses sous-ensembles non vides, qui sont forcément finis. Enfin, $\mathbb{R}^+$ n'est pas bien ordonné bien qu'il soit minoré, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ admet toujours une borne inférieure mais pas nécessairement un minimum (contre-exemple : $A =]0, 1[$).
2. Non, ils ne sont pas équivalents, puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné alors qu'il n'est pas fini. Il est par contre vrai que tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ est bien ordonné, de façon évidente (oui, ça marche même si ce sous-ensemble est vide : l'ensemble vide est un ensemble bien ordonné, puisqu'il n'admet aucun sous-ensemble non vide et vérifie donc trivialement la définition donnée dans l'énoncé).
3. En notant $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, l'ensemble A est simplement l'ensemble des termes de la suite (u_n), qui est strictement croissante (et accesoirement tend vers 1). Soit $D \subset A$, en notant C l'ensemble des indices des termes de la suite constituant l'ensemble D, C est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui admet donc un minimum n_0 (puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné). Le nombre u_{n_0} est alors le minimum de D (par croissance de la suite (u_n)), qui est donc bien ordonné. Au contraire, la suite constituant l'ensemble B est une suite décroissante tendant vers 0, et l'ensemble B tout entier n'admet pas de minimum (sa borne inférieure est 0, qui n'appartient pas à B). Il n'est donc pas bien ordonné.
4. Il ne faut pas se laisser perturber par l'apparence ignoble de l'ensemble, et se concentrer sur ses caractéristiques importantes : il s'agit à nouveau des termes d'une suite, mais cette

fois-ci une suite donc la limite vaut $+\infty$ (c'est en fait facile à prouver, le dénominateur est inférieur à $2023n+2$, ce qui suffit à minorer la suite par quelque chose qui tend vers $+\infty$ par comparaison des degrés du numérateur et du dénominateur). Soit donc un sous-ensemble non vide de C, notons n_0 l'entier le plus petit correspondant à un élément de ce sous-ensemble. L'élément correspondant n'est pas forcément minimal (on ne sait pas si la suite est croissante, même si ici elle l'est au moins à partir d'un certain rang), mais il existe nécessairement un nombre **fini** de termes de la suite inférieurs à celui d'indice n_0 (sinon, la suite ne pourrait pas avoir une limite infinie : par définition, une telle suite a **tous** ses termes qui deviennent plus grands que n'importe quel réel fixé à partir d'un certain rang). En particulier, il y a un nombre fini d'éléments dans notre sous-ensembles plus petits que notre élément numéro n_0, et cet ensemble fini d'éléments admet un minimum. L'ensemble C est donc bien ordonné.

5. Soit C un sous-ensemble non vide de $A \cup B$. Les sous-ensembles $C \cap A$ et $C \cap B$ admettent chacun un minimum par hypothèse (sauf si' l'un des deux est vide, mais dans ce cas C est un sous-ensemble de A ou de B, donc a forcément un minimum). Le plus petit de ces deux minimums est le minimum de C (démonstration vraiment facile, tout élément de C appartenant soit à $C \cap A$, soit à $C \cap B$). L'ensemble $A \cup B$ est donc bien ordonné.

   C'est aussi vrai pour la différence symétrique : $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. Or, tout sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné (c'est complètement trivial), donc $A\backslash B$ (qui est inclus dans A) et $B\backslash A$ (qui est inclus dans B) sont bien ordonnés si A et B le sont, et leur union également d'après le raisonnement précédent.

6. Il suffit de constater que 2^k divise toujours 2^l quand $k \leqslant l$ pour prouver que l'ensemble est bien ordonné : un sous-ensemble est minoré par la plus petite puissance de 2 qu'il contient. Pour un contre-exemple dans le cas général, n'importe quel ensemble n'ayant pas de minimum convient, par exemple $A = \{2, 3\}$. En fait, si un ensemble est bien ordonné, l'ordre correspondant est nécessairement un ordre total (sinon, on peut créer des sous-ensembles à deux éléments sans minimum), ce qui n'est pas le cas de la relation de divisibilité.

Exercice 3 : étude d'une suite.

1. On applique la définition : $u_1 = \sqrt{1+1+1^2} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$. On en déduit que $u_1^2 = 3 - \sqrt{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} - \sqrt{3}$, puis $u_2 = \sqrt{1+\sqrt{3}-\frac{1}{2}+\frac{13}{4}-\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{15}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}-1}{2}$. Quand l'énoncé demande les trois premiers termes de la suite (v_n), il s'agit des indices 0, 1 et 2, pas besoin d'aller jusqu'à v_3. Calculons tout de même $v_0 = 1^1 + 1 = 2$, puis $v_1 = u_1^2 + u_1 = \frac{13}{4} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$. Enfin, $u_2^2 = \frac{15}{4} - \sqrt{\frac{15}{4}} + \frac{1}{4} = 4 - \sqrt{\frac{15}{4}}$, puis $v_2 = u_2^2 + u_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.
2. La suite (u_n) n'a absolument aucune régularité notable. Si on veut le prouver rigoureusement, on constate que $u_1 - u_0 = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \sqrt{\frac{15}{4}} - \sqrt{3}$. Ces deux nombres n'étant pas vraiment égaux, la suite n'est pas arithmétique. De même, les quotients $\frac{u_1}{u_0}$ et $\frac{u_2}{u_1}$ ne sont absolument pas identiques, donc la suite n'est pas géométrique.
3. Les premiers termes calculés laissent supposer que (v_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{4}$ (si vous ne l'aviez pas vu, il y a de bons ophtalmologistes sur Bordeaux). Prouvons-le : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 + u_{n+1} - u_n^2 - u_n = \left(\sqrt{1+u_n+u_n^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{1+u_n+u_n^2} - \frac{1}{2} - u_n^2 - u_n = 1 + u_n + u_n^2 - \sqrt{1+u_n+u_n^2} + \frac{1}{4} + \sqrt{1+u_n+u_n^2} - \frac{1}{2} - u_n^2 - u_n = \frac{3}{4}$, ce qui prouve la conjecture effectuée.
4. La suite est arithmétique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 2$, donc $v_n = 2 + \frac{3}{4}n$.

5. On a donc $u_n^2 + u_n = 2 + \frac{3}{4}n$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 + 3n = 9 + 3n$, et admet pour racines $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2}$. Comme $u_n \geqslant -\frac{1}{2}$ par définition, on en déduit que $u_n = x_2 = \frac{\sqrt{9 + 3n} - 1}{2}$.
6. Oui, la suite (u_n) est manifestement croissante.
7. Tout aussi clairement, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 : un peu de logique pure.

1. Si les trois sphinx disent la vérité, la piste de droite mène à la philo (sphinx 2) et celle de gauche à l'oasis (sphinx 1). On vérifie que c'est compatible avec l'affirmation du sphinx 3, ce qui est le cas (puisque la prémisse de l'implication est fausse, celle-ci est vraie même si sa conclusion est aussi fausse).
2. C'est très simple, si le sphinx 1 ment, les deux pistes doivent mener à la philo. Notons que cela implique que le sphinx 2 dit la vérité, mais que le sphinx 3 ment.
3. Tout ce qu'on peut dire dans ce cas est que la piste de droite mène à une oasis, mais on ne peut rien dire sur la piste de gauche sans information supplémentaire.
4. Le seul cas où une implication est fausse, c'est quand sa prémisse est vraie mais sa conclusion fausse. Si le sphinx 3 ment, la piste de gauche mène donc à la philo (prémisse vraie), mais la piste de droite aussi (conclusion fausse). Une situation peu enviable, qui est la même que celle du cas « le sphinx 1 ment ».
5. Cette situation est impossible d'après les trois questions précédentent : on ne peut pas avoir la piste de droite qui mène à la fois à la philo (si les shinx 1 et 3 mentent) et à une oasis (si le sphinx 2 ment).
6. On a déjà vu que si le sphinx 1 ment, alors le sphinx 3 ment aussi, et vice-versa. La seule possibilité pour qu'un seul des trois sphinx dise la vérité est donc que ce soit le deuxième. Et comme on veut en plus que les sphinx 1 et 3 mentent, dans ce cas, les deux chemins mènent à la philo (encore !).
7. Là encore, c'est forcément le sphinx 2 qui ne fait pas comme les autres et qui ment. La piste de droite mène donc à une oasis. Peu importe à quoi mène celle de gauche dans ce cas, les sphinx 1 et 3 diront nécessairement la vérité. Autant considérer que les deux pistes mènent à une oasis pour finir sur une note optimiste !