Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 10

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 2 mai 2024

Problème

Ce problème est consacré à la démonstration d'une version améliorée de la formule de Stirling, qui affirme que, lorsque n tend vers $+\infty$, les factorielles vérifient l'équivalent suivant : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

I. Intégrales de Wallis.

Cette première partie reprend partiellement le deuxième problème de la feuille d'exercices numéro 5. Je compte bien entendu sur vous pour m'en proposer une rédaction personnelle.

On note dans cette partie $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$ (intégrales étudiées par John Wallis au 17ème siècle, d'où leur nom et la lettre W utilisée pour les désigner).

1. Calculer les valeurs de W_0, W_1 et W_2 par la méthode de votre choix.
2. Calculer W_5 par une méthode imposée : linéarisation de $\sin^5(t)$ via les formules d'Euler.
3. Déterminer la monotonie de la suite (W_n). En déduire sa convergence.
4. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, et $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.
5. Montrer que le produit $W_n \times W_{n+1}$ est constant (et préciser sa valeur) de deux façons différentes : par récurrence, ou par un calcul direct exploitant les formules précédentes.
6. Déterminer la limite du quotient $\dfrac{W_n}{W_{n+1}}$.
7. Déduire des questions précédentes un équivalent (le plus simple possible) de W_n, puis la formule de Wallis suivante : $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

II. Formule de Stirling améliorée.

On définit désormais une deuxième suite d'intégrales : $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}}{t}\ dt$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\ dt = n\ln(n) - \ln(n!)$.
2. En déduire que $I_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n - \dfrac{1}{2}\ln(n) - 1$.

3. Montrer que $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{2n+1+x}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{2n+1-x}\, dx$.
4. En déduire que $I_{n+1} - I_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2}\, dx$.
5. Montrer que $\dfrac{1}{12(n+1)(n+2)} \leqslant I_n - I_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{12n(n+1)}$.
6. Montrer que les suites définies par $u_n = I_n - \dfrac{1}{12n}$ et $v_n = I_n - \dfrac{1}{12(n+1)}$ sont adjacentes. On notera α leur limite commune, sans chercher à la calculer.
7. Montrer que (I_n) admet un développement asymptotique de la forme $I_n = a + \dfrac{b}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
8. Déduire de ce qui précède qu'il existe un réel β tel que $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \times \beta\sqrt{n}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
9. En exploitant la formule de Wallis (dernière question de la première partie du problème), montrer que $\beta = \sqrt{2\pi}$ et conclure.

III. Pour les fans de Python.

Complément facultatif : écrire un programme Python calculant, pour un entier naturel n, la valeur de $n!$, celle de l'équivalent de Stirling et celle donnée par le développement asymptotique obtenu en partie II (pour obtenir les valeurs de π et e, on importera par exemple la bibliothèque **math**). On essaiera de faire une représentation graphique permettant de comparer ces trois valeurs pour n variant entre 1 et 1 000.