

Chapitre 19 : Séries numériques

PTSI B Lycée Eiffel

3 juin 2021

L'homme n'est rien d'autre que la série de ses actes.

FRIEDRICH HEGEL.

Objectifs du chapitre :

- savoir prouver correctement la convergence d'une série numérique.
- effectuer un calcul de somme dans un cas simple ou classique.

Introduction historique.

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre pour sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et nous a laissé quelques célèbres paradoxes à méditer à ce sujet. En gros, Zénon considérait carrément que le mouvement était impossible et prétendait le démontrer à l'aide de raisonnements menant à des absurdités manifestes (comme on peut penser que Zénon n'était en fait pas un débile complet et savait très bien que le mouvement existait, il s'agissait probablement plutôt d'une tentative de montrer qu'il est absurde de considérer le temps comme infiniment divisible, et de le voir comme une quantité intrinsèquement continue. Mais bon, on ne va pas se lancer dans un cours de philosophie aujourd'hui).

Le plus connu de ces paradoxes est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue. Un beau jour, donc, Zénon décide d'organiser une course entre une tortue (animal réputé pour sa capacité à gagner des courses improbables, comme chacun sait) et Achille, héros grec bien connu pour sa vitesse (qualifié par Homère dans l'Iliade d'« Achille aux pieds légers », ce qui est confirmé par l'immense bouse le film hollywoodien *Troie* où on voit régulièrement Brad Pitt littéralement voler au-dessus de ses ennemis). Bref, pour fixer les idées, supposons qu'Achille coure à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres par un athlète pas trop dopé), et la tortue (qui, elle, doit être un peu dopée) à 1 mètre par seconde. Pour équilibrer un peu les choses, Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ? La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ». Voici son raisonnement : le temps qu'Achille parcourt ses cent mètres, la tortue en a franchi dix, et Achille est toujours derrière. Pas grave, continuons à courir, et faisons parcourir à Achille dix mètres supplémentaires. Sauf que, pendant ce temps, la tortue va elle-même parcourir un mètre de plus ! On peut faire une troisième étape où Achille parcourt un

mètre et la tortue dix centimètres et ainsi de suite. On aura beau multiplier les étapes, Achille sera toujours derrière.

Comment résoudre le paradoxe ? Regardons les choses d'un point de vue temporel : Achille met 10 secondes pour franchir les cent premiers mètres, puis une seconde supplémentaire pour les dix mètres suivants, $\frac{1}{10}$ seconde pour le mètre suivant etc. Au total, Achille met donc $10 + 1 + \frac{1}{10} + \dots$ secondes avant de rejoindre la tortue. La somme constituant ce calcul est bel et bien constituée d'une infinité d'étapes, mais il n'empêche qu'elle converge quand même (avec le vocabulaire mathématique moderne) vers un nombre **fini**. Tout ce que Zénon a démontré, c'est donc qu'Achille ne rattrapera pas la tortue après un nombre fini d'étapes, mais absolument pas qu'il ne rattraperait pas la tortue en un **temps** fini. Mine de rien, cachée derrière cet exemple en apparence idiot, se trouve la définition d'un outil mathématique très puissant mais loin d'être évident à comprendre et à manipuler : celle de la série numérique. C'est exactement ce qu'on vient de croiser : une somme d'un nombre infini de réels strictement positifs donnant un résultat fini. Vérifions d'ailleurs qu'on est capable de prouver la convergence de la somme et de calculer sa limite. En notant S_n le temps écoulé pendant les n premières étapes de la course, on a $S_1 = 10$, $S_2 = 10 + 1 = 11$, $S_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = \frac{111}{10}$ etc.

En fait, pour tout entier naturel n , on aura $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{10^{n-1}}$, ou si on préfère $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k-2}}$.

On sait très bien calculer explicitement la valeur de S_n puisqu'il s'agit d'une somme géométrique : en décalant les indices, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^{k-1}} = 10 \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10}\right)^k$. On applique la formule bien connue :

$S_n = 10 \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$. Il reste tout de même une étape à faire, un passage à la

limite (sans difficulté ici) pour obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{100}{9}$. On se permettra d'écrire pour plus de lisibilité

$10 + 1 + \frac{1}{10} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k-2}} = \frac{100}{9}$, mais il faut bien avoir conscience qu'une « somme infinie »

n'est en fait qu'une limite de somme convergente (et se méfier quand on manipule ces écritures, on ne peut pas faire les mêmes manipulations qu'avec des sommes finies). Bien entendu, la valeur $\frac{100}{9}$, qui correspond donc au temps mis par Achille pour rejoindre la tortue, aurait pu être trouvée par des méthodes plus basiques (en écrivant par exemple les équations du mouvement de la tortue et d'Achille dans un repère dont l'origine est la position initiale d'Achille).

1 Définitions

Définition 1. Soit (u_n) une suite réelle. La **série de terme général** u_n est la suite (S_n) des sommes partielles de la suite (u_n) . Autrement dit, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On note cette série $\sum u_n$.

Remarque 1. On peut construire des séries à partir de suites qui ne sont pas définies à partir de $n = 0$. Dans ce cas, on changera naturellement la valeur de départ dans la somme : si (u_n) est par exemple définie pour $n \geq 1$, on pose $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Remarque 2. Il faut faire très attention dans le cadre des séries à bien manier le vocabulaire. Ce qu'on appelle le terme général (noté u_n) de la série est ce qui se trouve à l'intérieur de la somme définissant la série. Il ne faut surtout pas le confondre avec le terme d'indice n de la série, qui sera noté S_n et qui est égal à $\sum_{k=0}^n u_k$. Le fait qu'on note la série toute entière (la suite (S_n) donc) avec une somme « sans indices » n'aide pas vraiment à simplifier les choses mais c'est une notation standard.

Exemple : La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (pour $n \geq 1$) est définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Attention à ne pas confondre u_n et S_n : les premiers termes de la suite (u_n) sont $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{9}$. Ceux de la série (S_n) sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$. Précisons à nouveau que la notation $\sum \frac{1}{n^2}$ (sans indice) désigne la même chose que (S_n) (la série, autrement dit la suite des sommes). Dans cet exemple simple, il est évident que la suite (u_n) converge vers 0, mais la nature de la série $\sum u_n$ est beaucoup moins évidente (la suite (S_n) est manifestement croissante, mais sa convergence est beaucoup plus difficile à prouver, et la valeur de sa limite est carrément impossible à calculer par des méthodes basiques, nous reviendrons dessus dans la suite du chapitre).

Définition 2. La série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite (S_n) a une limite finie. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée **somme de la série**, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente. Déterminer la nature d'une série revient à déterminer si elle est convergente.

Remarque 3. Attention, comme signalé précédemment, la convergence de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$ ne sont pas du tout la même chose ! La convergence d'une série revient à celle des sommes partielles de la suite (u_n) . Il faut par ailleurs faire très attention à la manipulation des sommes infinies. On ne peut utiliser cette notation qu'à partir du moment où on sait que la série converge, et on ne peut pas manipuler ces sommes aussi aisément que des sommes finies. Dans tous les cas, il est indispensable de s'assurer de la convergence d'une série avant d'utiliser ces sommes, c'est pourquoi on commence toujours, lors de l'étude d'une série inconnue, par étudier les sommes partielles, puis passer à la limite (on peut aussi éventuellement utiliser des théorèmes généraux assurant la convergence de la série sans faire le calcul à la main).

Exemple : Dans l'exemple de l'introduction, la série (S_n) était convergente, avec une somme égale à $\frac{100}{9}$.

Exemple : Il peut arriver qu'on puisse démontrer la convergence d'une série sans pour autant savoir calculer sa somme. Reprenons l'exemple de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. La suite (S_n) étant une somme de termes positifs, elle est croissante (si on veut être ultra rigoureux, on écrit $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$), elle sera donc convergente si et seulement si elle est majorée (théorème de convergence monotone). Or, pour tout entier $n \geq 1$, on a certainement $n^2 \geq n(n-1)$, donc $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ (cette dernière inégalité n'est évidemment valable que si $n \geq 2$), donc $S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$ (on a isolé le premier terme de la somme pour pouvoir appliquer l'inégalité précédente). Or, la somme obtenue maintenant à droite de l'inégalité se calcule très bien à coups de décomposition en éléments simples et de somme télescopique : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, donc $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$ (si ce genre de calcul vous semble incompréhensible, retournez de toute urgence réviser les calculs de sommes du chapitre 4, ce sera nécessaire pour comprendre beaucoup de choses sur les séries). Finalement, on déduit de tous nos petits calculs que $S_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$. La suite croissante (S_n) étant majorée par 2, elle converge nécessairement.

Bien entendu, notre raisonnement ne nous permet pas de connaître la limite de cette série, qu'on noterait $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, tout ce qu'on peut dire est que cette limite est inférieure ou égale à 2. En fait elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Notons qu'on peut aussi démontrer la convergence de (S_n) à l'aide par exemple de suites adjacentes (c'était l'objet d'un exemple vu en cours il y a quelques mois), mais aucune des méthodes simples prouvant la convergence ne donnera en même temps la valeur de la somme.

Exemple : Un petit dernier avec alternance de signes dans le terme général : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (pour $n \geq 1$). Le fait d'avoir des signes qui changent complique l'étude de la série puisque (S_n) ne sera pas croissante (ni décroissante). Regardons les premiers termes pour se faire une idée de ce qui va se passer : $S_1 = 1$, puis $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et $S_4 = S_3 - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Si on va un peu plus loin et qu'on s'amuse à placer les différents termes de la suite, on soupçonne qu'elle va effectivement converger (vers une valeur se situant quelque part entre $\frac{1}{2}$ et 1) en oscillant autour de sa limite. Cette observation va nous pousser à séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs. Posons donc $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$. La suite (v_n) est croissante : $v_{n+1} - v_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$. De même, (w_n) est décroissante : $w_{n+1} - w_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$. Comme de plus, leur différence $w_n - v_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commune, qui est également limite de la suite (S_n) . On peut montrer par d'autres méthodes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$ (si vous voulez savoir d'où peut bien sortir ce $\ln(2)$, écrivez donc le développement limité de $\ln(1+x)$ et posez $x = 1$, ça devrait vous éclairer).

Définition 3. Si la série $\sum u_n$ converge, le **reste d'indice** n de la série est le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

Proposition 1. Sous les hypothèses précédentes, la suite (R_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, comme les sommes partielles convergent vers la somme de la série, l'écart entre les deux tend vers 0. $\square$

Définition 4. La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 2. Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Pas pour l'instant ! Vous reverrez en deuxième année des critères de convergence permettant de démontrer cette propriété. $\square$

Remarque 4. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, dont on a vu qu'elle était convergente, n'est pas absolument convergente (cf dernière partie du cours, divergence de la série harmonique). On dit que c'est une série **semi-convergente**.

2 Théorèmes de convergence.

Proposition 3. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors le terme général (u_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, si la série converge, (S_n) converge vers la somme de la série, qu'on va par exemple noter S (notation standard pour une somme de série). Mais alors, (S_{n+1}) tend aussi vers S . Or, on a $u_n = S_{n+1} - S_n$, qui converge donc vers 0. $\square$

Remarque 5. Attention, cette condition est nécessaire mais **pas** suffisante. Encore une fois, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, et pourtant, la limite de $\frac{1}{n}$ vaut bien 0. C'est une erreur extrêmement fréquente sur les copies, à éviter absolument car ça énerve énormément les correcteurs.

Exemple : Ce critère s'utilise surtout via sa contraposée : si le terme général ne tend **pas** vers 0, alors la série est divergente. Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas. On dit dans ce cas que la série est **grossièrement** divergente.

Proposition 4. Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors leur somme $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$. De même, si λ est un réel quelconque, $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration. C'est une application directe des propriétés de la limite. Montrons par exemple la première partie. Notons S_n , T_n et U_n les sommes partielles respectives des séries de terme général u_n , v_n et $u_n + v_n$. On a manifestement $U_n = S_n + T_n$. Si les deux suites S_n et T_n convergent, ce sera donc aussi le cas de U_n et sa limite est bien la somme des limites de S_n et de T_n . $\square$

Remarque 6. Attention encore une fois à la rédaction : ce n'est pas parce qu'une série est convergente et qu'on peut découper la somme en deux morceaux que les deux morceaux en question forment également des séries convergentes. Il est donc préférable de ne travailler dans un premier temps qu'avec des sommes partielles.

Exemple : On a vu un peu plus haut que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergeait vers $\ln(2)$ (enfin, on a prouvé qu'elle convergeait, et je vous ai affirmé que la limite valait $\ln(2)$). Autrement dit, on peut écrire une égalité du genre $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln(2)$. Imaginons qu'on conserve les mêmes termes, avec les mêmes signes, mais qu'on bouscule un peu l'ordre : on veut savoir si la somme $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$ converge (on alterne en permanence deux termes « positifs » de dénominateur impair et un terme « négatif » de dénominateur pair, en utilisant tous les dénominateurs à un moment ou à un autre, comme précédemment). Si cette nouvelle somme (qu'on peut décrire de façon théorique comme une série, bien entendu) converge, quelle sera sa limite ? Je sens l'incompréhension gagner vos petits cerveaux, vous avez tous envie de répondre « bah oui, ça converge vers $\ln(2)$, on vient de le dire, c'est quoi cette question triviale ? ». Eh bien, la question est peut-être triviale, mais la réponse beaucoup moins. En fait, cette nouvelle somme ne converge

pas du tout, alors qu'on a gardé les mêmes termes en modifiant simplement l'ordre (elle tend vers $+\infty$). C'est en fait pire que ça : à partir des mêmes termes (avec les mêmes signes), toujours en modifiant l'ordre, on peut créer d'autres séries qui convergent, mais pas nécessairement vers $\ln(2)$. On peut même créer des séries qui convergent vers n'importe quel réel fixé à l'avance ! Je sens vos vagues certitudes mathématiques vaciller, la somme n'est donc pas une opération commutative ? Si, bien sûr, mais la somme **de série**, qui est un mélange de calcul de somme et de limites, elle, est beaucoup plus compliquée. En fait, ce qui pose problème dans l'exemple ci-dessus, c'est qu'on ne peut pas séparer les termes positifs et les termes négatifs dans deux sommes distinctes et dire que notre série va converger vers la différence des deux, car ces deux sommes distinctes ne convergeraient pas (donc on aurait en gros un résultat qui vaudrait $+\infty - \infty$, belle forme indéterminée). Il faut retenir que les séries dont les termes sont de signes alternés, de façon générale, c'est très vilain.

Proposition 5. Si le terme général u_n de la série est positif, la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. En effet, la suite (S_n) est alors croissante. Elle est donc soit majorée et convergente, soit non majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$. $\square$

Corollaire 1. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n vérifiant $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration. En effet, dans le premier cas on aura, en notant n_0 le rang à partir duquel les inégalités sont vérifiées, $\forall n \geq n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$, donc les sommes partielles de terme général u_n sont majorées et la série correspondante converge. La deuxième propriété est similaire, en utilisant cette fois-ci que la série de terme général v_n est supérieure à une suite divergent vers $+\infty$, donc diverge elle aussi vers $+\infty$. $\square$

Théorème 1. Comparaison série-intégrale.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs vérifiant les hypothèses suivantes :

- la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- il existe une fonction f continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$.

Alors la série $\sum u_n$ a la même nature que l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration. Pas de preuve de ce théorème vaguement hors-programme (puisque'on n'a pas encore parlé ensemble d'intégrales à bornes infinies, ce qui est pourtant au coeur de ce résultat), mais ce n'est en fait pas très difficile (voir l'exemple détaillé de la série harmonique un peu plus bas pour une idée de preuve). $\square$

Exemple : La série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$ (pour $n \geq 2$) vérifie les hypothèses de ce théorème. Elle a donc la même nature que $\int_2^x \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$, la série est divergente (c'est un cas particulier de ce qu'on appelle les séries de Bertrand).

Théorème 2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$, alors les deux séries ont la même nature.

Démonstration. Ce théorème, ainsi que d'autres critères de convergence sur les séries, sera revu et démontré en deuxième année. Il n'est d'ailleurs pas au programme de première année, mais je vous le cite tout de même car il est extrêmement utile. Tellement d'ailleurs que c'est le critère que vous utiliserez quasiment tout le temps dans les exercices. $\square$

3 Séries de référence.

Proposition 6. Séries télescopiques.

Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général peut s'écrire sous la forme $v_{n+1} - v_n$, alors la nature de cette série est la même que celle de la suite (v_n) .

Démonstration. C'est trivial : $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$, qui a clairement la même nature que (v_n) (mais pas la même limite dans le cas où elles convergent, il y a un décalage de v_0). En fait, on peut aussi avoir des cas de télescopes entre plusieurs termes consécutifs de la série, pas nécessairement deux (on a déjà vu des exemples de ce type lors du calcul de sommes finies il y a quelques mois). $\square$

Exemple : On cherche à déterminer la nature et la somme de la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Comme la série est à termes négatifs et que $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente, notre série converge. Pour le calcul de la somme par télescopage, il est fortement conseillé d'écrire le télescopage avec des sommes partielles pour ne pas risquer de découper une série convergente en somme de deux séries divergentes :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2 \ln(k) = \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(n) + \ln(n+1) + \ln(2) + \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2 \ln(2) - 2 \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2 \ln(n) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Cette expression ayant pour limite $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$, notre série est bien convergente, et $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$.

Définition 5. Soit $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^n$ est appelée **série géométrique** de raison q .

Proposition 7. La série géométrique de raison q est convergente si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration. On sait calculer les sommes partielles depuis un certain temps : $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant les résultats sur les limites de suites géométriques, on constate la convergence de la série lorsque $|q| < 1$, vers la somme indiquée. $\square$

Remarque 7. Ce résultat se généralise à d'autres séries, souvent désignées sous le nom de séries géométriques dérivées (vous comprendrez pourquoi quand on va faire le calcul de la somme partielle). Nous donnerons simplement le cas de la dérivée première (on peut aussi faire des dérivées secondes, tierces, sur le même principe), qui est d'ailleurs à la limite du programme (mais c'est bien pratique, vous pourrez donc l'utiliser dans les exercices).

Proposition 8. On appelle **série géométrique dérivée** de raison q la série de terme général kq^{k-1} . Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Démonstration. Pour prouver cette proposition, on va réellement utiliser un calcul de dérivée, en « transformant la série en fonction ». Posons donc $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ (ce qui correspond à la somme partielle de la série géométrique de raison x). Si on dérive cette fonction à partir de son expression sous forme de somme, on obtient $f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$, c'est-à-dire exactement la somme partielle de la série géométrique **dérivée** de raison x (d'où le nom de cette dernière). Or on sait par ailleurs que $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc (via un sympathique calcul de dérivée de quotient) $f'(x) = \frac{-(n+1)x^n + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en utilisant le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0$ (par croissance comparée) pour obtenir la convergence de

la somme partielle vers la valeur voulue : $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. On constate d'ailleurs que la for-

mule obtenue est la dérivée (par rapport à la variable x) de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, ce qui permet si besoin de retrouver très facilement la formule. On aurait d'ailleurs de même, en dérivant une fois de plus, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$, et ainsi de suite. $\square$

Remarque 8. On peut déduire du résultat précédent les valeurs d'autres sommes de séries. Par exemple, si $|q| < 1$, la série de terme général nq^n converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$. En effet, on a

$S_n = \sum_{k=0}^n kq^k = q \times \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$, et on est ramené au cas de la série géométrique dérivée.

Proposition 9. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x , et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.
 Pour cette raison, cette série est souvent appelée **série exponentielle**.

Démonstration. On manque d'une définition suffisamment claire de l'exponentielle pour prouver ceci, mais c'est en tout cas très cohérent avec la formule du développement limité de la fonction exponentielle. $\square$

Exemple : Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Définition 6. La série de terme général $\frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

Proposition 10. La série harmonique est divergente. Plus précisément, la somme partielle de cette série est équivalente à $\ln n$.

Démonstration. La divergence de cette série est une conséquence triviale du théorème de comparaison série-intégrale. Pour obtenir l'équivalent, on va faire un calcul un peu plus précis : si k est un entier naturel non nul, $\forall x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant ces inégalités entre k et $k+1$, on obtient $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$, soit $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ (seule l'intégrale du milieu est une « vraie » intégrale, les deux autres sont des intégrales de constantes). Gardons l'inégalité de droite et décalons l'indice dans celle de gauche pour obtenir l'encadrement $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$. En additionnant ces encadrements pour tous les entiers de 2 à n (on ne peut pas le faire pour $k = 1$ à cause du $k-1$ apparaissant dans le membre de gauche), on obtient alors $\int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$ (les sommes d'intégrales se simplifiant en appliquant simplement la relation de Chasles), soit $\ln(n+1) - \ln 2 \leq \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$. En notant $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, on a donc $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1$. En divisant tout par $\ln n$, on en déduit $\frac{\ln(n+1) - \ln(2) + 1}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Le membre de droite a manifestement pour limite 1, quand n tend vers $+\infty$, et celui de gauche également, car $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$, donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}$, qui tend vers 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$, ce qui signifie exactement que $H_n \sim \ln n$. $\square$

Définition 7. On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

Théorème 3. Critère de Riemann

Une série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. C'est un exercice facile utilisant la comparaison série-intégrale. $\square$

Remarque 9. Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente puisque correspondant à $\alpha = 2$. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est aussi une série de Riemann, mais divergente puisqu'elle correspond à $\alpha = 1$. C'est en quelque sorte la « plus petite » série de Riemann qui ne converge pas.

4 Mathémagiques.

Cette dernière partie, complètement hors-programme, est fortement inspirée d'un article du grand mathématicien Pierre Cartier (né en 1932), intitulé *Mathemagics (a tribute to L.Euler and R.Feynman)*, et facilement téléchargeable en ligne pour les plus motivés d'entre vous (une bonne partie de l'article dépasse quand même nettement votre domaine de compétences ; accessoirement, ça vous fera bosser un peu votre anglais, il n'y a pas de traduction disponible à ma connaissance). On ne présente plus Leonhard Euler en cours de maths, mais pour ceux qui ne le sauraient pas, Richard Feynman est l'un des plus grands physiciens du 20ème siècle (et fût notamment un très grand vulgarisateur). Vous demanderez à M.Raimi de vous expliquer rapidement les diagrammes de Feynman, je suis sûr qu'il se fera un plaisir de vous répondre.

4.1 Des calculs dignes d'un élève de PTSI !

Nous allons effectuer dans les paragraphes qui suivent des séries de calculs pour le moins douteux, notamment en manipulant joyeusement des séries divergentes comme si elles convergeaient, pour obtenir des résultats assez suprenants. La partie suivante essaiera de donner quelques pistes pour justifier la cohérence de tels calculs, mais il est évident qu'ils n'auraient aucun sens dans le cadre décrit dans le cours, et qu'il est hors de question de faire figurer sur une copie !

4.1.1 Sommes de séries divergentes.

Considérons la série de terme général $(-1)^n$. Elle diverge bien sûr grossièrement puisque $(-1)^n$ ne tend pas vraiment vers 0. Pourtant, si on supposait qu'elle puisse admettre une somme que nous noterons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$, quelle serait la valeur la plus logique à donner à S ? Laissons la parole à notre taupin peu rigoureux, qui va faire le brillant calcul suivant (il écrit deux fois la somme S , en insérant un 0 au début de la deuxième somme et en décalant tous les termes suivants, puis il additionne les deux lignes) :

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & \dots \\ +S & = & 0 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & \dots \\ \hline 2S & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots \end{array}$$

Finalement, $2S = 1$, soit $S = \frac{1}{2}$. Logique, non ? Tout ce qu'on a utilisé, c'est le droit d'additionner deux séries (propriété de linéarité), et le fait qu'on ne change pas la somme en décalant les termes et en ajoutant un 0 au début (ce qu'on appellera pour la suite la propriété de « décalabilité »). Sur sa lancée, notre élève zélé décide de tenter une bidouille à sa façon sur la série $\sum (-1)^n n$, qui diverge tout autant (si ce n'est plus !) que la précédente. Il note T la somme de cette série divergente, et effectue le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
T & = & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & + & 6 & \dots \\
+T & = & 0 & + & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & \dots \\
\hline
2T & = & 0 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & - & 1 & + & 1 & \dots
\end{array}$$

On reconnaît sur la dernière ligne l'opposée de la série précédente, on conclut donc que $2T = -S = -\frac{1}{2}$, donc $T = -\frac{1}{4}$. Encore un calcul d'une logique imparable, qui utilise les mêmes propriétés que précédemment (linéarité et « décalabilité » de la somme). Il est maintenant temps de tenter un troisième calcul encore plus impressionnant que les deux autres réunis. On va tenter de calculer la somme de la série $\sum n$, qui semble vraiment très très divergente. N'ayons pas peur et notons U la somme de cette série, puis effectuons le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
U & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & \dots \\
+T & = & 0 & - & 1 & + & 2 & - & 3 & + & 4 & - & 5 & + & 6 & \dots \\
\hline
U+T & = & 0 & + & 0 & + & 4 & + & 0 & + & 8 & + & 0 & + & 12 & \dots
\end{array}$$

On obtient cette fois-ci la relation $U + T = 4U$ (quitte à supprimer les 0 qui ne changeront de toute façon pas la valeur de la somme), soit $3U = T = -\frac{1}{4}$. On conclut au surprenant résultat suivant : la somme de tous les entiers vaut $-\frac{1}{12}$. Bon, n'allez pas trop le répéter, on risquerait de vous prendre pour encore plus mauvais en maths que vous ne l'êtes vraiment. Contentons-nous de signaler que, pour obtenir ces résultats absurdes, on n'a utilisé à nouveau que les deux propriétés suivantes : la linéarité de la somme de série, et la « décalabilité ». Ces deux propriétés sont évidemment vraies pour des séries convergentes, mais peut-on les prolonger de façon cohérente à d'autres séries ? Nous reviendrons là-dessus plus loin. En attendant, continuons à faire des calculs bizarres pour obtenir des résultats rigolos (et parfois même corrects !). Il n'y a pas que les sommes dans la vie, on peut manipuler bien d'autres choses de façon peu rigoureuse.

4.1.2 Manipulations douteuses de polynômes.

Intéressons-nous au polynôme $S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k$. Ah oui, tiens, ce n'est pas tout à fait un vrai polynôme. Bon, pas grave, on va faire comme si de rien n'était. Effectuons alors une manipulation qui ressemble étrangement à ce que nous avons fait à plusieurs reprises dans le paragraphe précédent :

$$\begin{array}{rcccccccc}
S(t) & = & 1 & - & t & + & t^2 & - & t^3 & + & t^4 & - & t^5 & \dots \\
+tS(t) & = & 0 & + & t & - & t^2 & + & t^3 & - & t^4 & + & t^5 & \dots \\
\hline
(1+t)S(t) & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots
\end{array}$$

Bref, $S(t) = \frac{1}{1+t}$. En fait, cette relation est rigoureusement exacte, à une condition, c'est qu'on ait $|t| < 1$ (on calcule alors une somme de série géométrique convergente). Poussons un peu le bouchon en

considérant que ce n'est pas loin de marcher pour $t = 1$, ce qui donnerait $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = \frac{1}{2}$. Tiens, ça ne

vous rappelle pas quelque chose ? Généralisons un peu (volontairement, je ne mets pas d'indices sous la somme, puisqu'on va appliquer un calcul qui serait correct avec des sommes finies à des sommes de séries), pour tout entier naturel p , on peut écrire : $\sum (-1)^k t^k k^p = \sum k^p (-t)^k$. Remarquons maintenant la chose suivante : si on pose $f(t) = (-t)^n$, alors $tf'(t) = t \times (-n) \times (-t)^{n-1} = n(-t)^n$. En notant φ l'application linéaire qui, à une fonction f de la variable t , associe $tf'(t)$, on peut alors écrire que $k^p (-t)^k = \varphi^p((-t)^n)$ (la puissance étant à comprendre au sens d'une composée d'applications linéaires, comme d'habitude). Enchainons avec le sublime calcul suivant, en utilisant la linéarité sur une somme infinie (après tout, ça marche quand la somme est finie, y a pas de raison de se priver

de généraliser) : $\sum_{k=0}^{+\infty} k^p (-t)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^p((-t)^k) = \varphi^p\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k\right) = \varphi^p\left(\frac{1}{1+t}\right)$. Lorsque p est égal à 0, on retrouve le résultat du calcul précédent : $\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1+t}$. Appliquons une première fois l'application φ : la dérivée de $\frac{1}{1+t}$ vaut $-\frac{1}{(1+t)^2}$, donc $\varphi\left(\frac{1}{1+t}\right) = -\frac{t}{1+t}$, ce qui revient à dire que $\sum_{k=0}^{+\infty} k(-1)^k t^k = -\frac{t}{1+t}$. Encore une fois, cette formule est rigoureusement exacte pour toutes les valeurs de t appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$. Si on se permet de prendre $t = 1$ dans cette relation, on retrouve $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k = -\frac{1}{4}$, soit la formule obtenue pour la somme T dans le paragraphe précédent.

On peut continuer : pour $p = 2$, on calcule $t \times \left(\frac{-t}{(1+t)^2}\right)' = t \times \frac{-(1+t)^2 + 2t(1+t)}{(1+t)^4} = \frac{t(t-1)}{(1+t)^3}$. On peut donc écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k^2 t^k = \frac{t(t-1)}{(1+t)^3}$, ce qui donne, en prenant $t = 1$, l'intéressante relation $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k^2 = 0$ (mais oui). Je vous laisse vérifier si vous le souhaitez que, pour $p = 3$, on obtiendrait de même $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k^3 = \frac{1}{8}$, et on peut continuer encore longtemps comme ça. Passons plutôt à autre chose.

4.1.3 Un peu d'intégrales.

Puisque multiplier un peu tout et n'importe quoi par $(-1)^k$ donne des résultats rigolos, pourquoi ne pas introduire des choses qui divergent encore plus rapidement comme des factorielles ? On va désormais tenter de donner une valeur à la somme suivante : $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k!$. Après tout, là, on a quelque chose qui diverge quand même bien violemment. Pas grave, on va s'en sortir, il « suffit » pour cela de savoir qu'on peut écrire $k! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$ (c'est même à peu près à votre portée, ça se prouve par une récurrence assez tranquille, en admettant qu'on a le droit de faire une IPP sur une intégrale avec une borne infinie). Il ne reste plus alors qu'à utiliser la linéarité de l'intégrale (quoi ? une somme infinie ? ah désolé je n'avais pas vu) : $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k! = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} (-t)^k dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$. Bon, on ne sait pas calculer cette dernière intégrale, mais on sait très bien prouver mathématiquement qu'elle existe bel et bien (attendez l'an prochain pour faire cette preuve). Elle vaut environ 0.596 (merci Wolfram, ça ne s'exprime pas très simplement, on a besoin d'une primitive de $\frac{e^x}{x}$ pour pouvoir donner une valeur exacte).

4.1.4 Une généralisation osée des relations coefficients-racines.

Dans ce dernier paragraphe consacré à des calculs absurdes, nous allons obtenir des relations tout à fait censées, et même rigoureusement exactes, à l'aide de calculs qui le sont nettement moins. Vous connaissez tous les relations coefficients-racines sur les polynômes ? On va les exprimer de façon légèrement différente de ce qu'on a vu en cours, puis appliquer le résultat à une fonction qui n'a rien d'un polynôme, et le résultat sera vraiment magique. Soit donc un polynôme P unitaire de degré n

ayant n racines notées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (pas d'arnaque pour l'instant, c'est un vrai polynôme). On peut donc écrire $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$. On peut également écrire ce même polynôme sous forme développée $P = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$, avec les relations que vous connaissez bien : $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -c_{n-1}$ etc. On va effectuer un calcul différent en s'intéressant à la dérivée logarithmique du polynôme P , à savoir $\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{x - \alpha_n}$ (on dérive P sous forme factorisée pour obtenir n termes qui sont des produits de $n - 1$ facteurs de la forme $x - \alpha_i$, ce qui se simplifie quand on divise par P). Allons plus loin : $\frac{P'(x)}{P(x)} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_i}} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha_i}\right)^k$ (bon, ok, ce serait mieux que le quotient apparaissant dans la deuxième somme soit de valeur absolue plus petite que 1, mais faisons comme si on n'avait rien vu). Autrement dit (et quitte à inverser les sommes), $\frac{P'(x)}{P(x)} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x^k}{\alpha_i^{k+1}}$. Notons, pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^k}$, on peut alors écrire notre relation sous la forme (en multipliant tout par x pour avoir les mêmes puissances dans la somme de droite) :

$$xP'(x) + P(x) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k x^k = 0$$

On peut identifier les termes de même degré dans cette équation, en écrivant P' et P sous forme développée : $c_1x + 2c_2x^2 + \dots + nc_nx^n + (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n)(\gamma_1x + \gamma_2x^2 + \dots + \gamma_nx^n) = 0$. On suppose pour simplifier que $c_0 = 1$, et en prenant les termes par puissances croissantes, on trouve les relations :

- $c_1 + \gamma_1 = 0$, soit $\gamma_1 = -c_1$.
- $2c_2 + \gamma_2 + c_1\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_2 = c_1^2 - 2c_2$.
- $3c_3 + \gamma_3 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_3 = -c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3$.
- $4c_4 + \gamma_4 + c_1\gamma_3 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_1 = 0$, soit $\gamma_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 - 4c_4 + 2c_2^2$.

Appliquons donc ces superbes résultats à un drôle de polynôme : $P(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Quoi, vous n'êtes

pas contents ? Pourtant, vous savez tous que $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \dots$, oublions le fait que ça part un peu jusqu'à l'infini. On aura donc $c_0 = 1$ (tout va bien), $c_1 = 0$ (et plus généralement $c_{2k+1} = 0$ pour tout entier k), $c_2 = -\frac{1}{6}$, $c_4 = \frac{1}{120}$ etc. Quelles sont les racines du « polynôme » P ? Facile, ce

sont celles de la fonction sinus, sauf 0, autrement dit, tous les multiples pairs de π (attention, il y en a des négatives, ce n'est pas évident de numéroter). Avec les notations précédentes, on peut par

exemple calculer $\gamma_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(-k\pi)^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Si on en croit les relations ci-dessus,

$\gamma_2 = c_1^2 - 2c_2 = \frac{1}{3}$, soit en faisant passer les constantes à droite, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Eh ben oui, c'est vrai,

ça marche ! Si ça c'est pas une méthode qui tue pour démontrer ce résultat difficile, je ne sais pas ce qu'il vous faut. Ne nous arrêtons pas en si bon chemin, regardons ce que vaut $\gamma_4 = \frac{2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$. En

appliquant encore les relations, $\gamma_4 = 0 - 0 + 0 - \frac{4}{120} + \frac{2}{36} = -\frac{1}{30} + \frac{1}{18} = \frac{2}{90}$. On en déduit que

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, ce qui est également tout à fait exact. On pourrait bien sûr généraliser à toutes les

sommes de la forme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$, pour tous les entiers p qui sont pairs. Par contre, ça ne marche pas du tout quand p est impair, puisqu'on a alors trivialement $\gamma_p = 0$ (les racines négatives compensent les

positives). Ce n'est pas un hasard, puisque ces valeurs ne peuvent de fait pas s'exprimer simplement. On va revenir un peu dessus un peu plus bas.

4.2 D'autres types de convergence pour les séries numériques.

Revenons un peu désormais à l'aspect théorique caché derrière ces drôles de calculs. Une façon un peu tordue de voir la théorie des séries est de considérer que la somme de séries est une application $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ \sum u_n & \mapsto S \end{cases}$, qui est définie sur un espace vectoriel E (celui des séries convergentes) qui est un sous-espace vectoriel du gros espace vectoriel constitué de toutes les séries numériques réelles. Cette application φ est une application linéaire, et elle est « décalable » au sens vu précédemment. La question qu'on peut se poser est simple : peut-on prolonger cette application φ à un espace E' plus gros que E de façon à ce qu'elle conserve la linéarité et la « décalabilité » et qu'elle coïncide bien sûr avec l'application φ pour toutes les séries convergentes ? Eh bien, la réponse est oui. Attention tout de même, on ne va non plus obtenir tout ce qu'on voudrait, et notamment on ne justifiera jamais la somme U de la première partie par un calcul de convergence « décalable », comme le prouve le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} U & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & \dots \\ -2U & = & 0 & + & 0 & - & 2 & - & 4 & - & 6 & - & 8 & - & 10 & \dots \\ +U & = & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & \dots \\ \hline 0 & = & 0 & + & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & \dots \end{array}$$

La relation $0 = 1$, quand même, on a beau aller chercher aussi loin qu'on veut, ça pose problème. Pas grave, on va quand même voir deux nouvelles définitions de la convergence de séries qui étendent la définition classique vue dans ce cours, et qui permettent de comprendre un peu mieux pourquoi les valeurs aberrantes calculées pour S , T et U ont une certaine logique. Commençons par quelque chose que vous pouvez vraiment bien comprendre :

Définition 8. Une suite réelle (u_n) est **convergente au sens de Cesaro** si la suite auxiliaire définie par $v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}$ converge.

Autrement dit, (u_n) converge si la moyenne de ses sommes partielles converge. Un résultat classique sur les suites affirme qu'une suite convergente (au sens classique) est toujours convergente au sens de Cesaro (avec la même limite), ce qui prouve que cette nouvelle notion de convergence étend la notion classique (ce résultat constitue une partie de l'exercice 12 de la feuille d'exercices numéro 7). Il est assez facile de créer des exemples de suites qui convergent au sens de Cesaro, mais pas au sens usuel. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ tend vers 0 au sens de Cesaro.

Essayons d'appliquer cette définition à nos différentes séries (attention, il s'agit bien ici de faire la moyenne des sommes partielles, et pas des termes généraux) : pour $\sum (-1)^k$, on calcule $S_0 = 1$, $S_1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$ etc. Autrement dit, $\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{1}{2}$ si n est impair, et $\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{\frac{n}{2} + 1}{n+1}$ si n est pair. Ces moyennes tendent vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence au sens de Cesaro de notre série vers $\frac{1}{2}$. Tentons de faire la même chose pour $\sum (-1)^k k$. On calcule donc $T_0 = 0$, $T_1 = -1$, $T_2 = 1$, $T_3 = -2$, $T_4 = 2$ etc. On va cette fois-ci obtenir alternativement des sommes partielles égales à 0 (si n est pair), et à $-\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Ce n'est pas bon du tout, puisqu'il n'y a pas de limite unique quand n tend vers $+\infty$. Tentons alors une nouvelle définition :

Définition 9. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout réel x pour lequel cette somme a un sens, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Si f est définie au voisinage de 1 (mais pas en 1, sinon la série convergerait au sens usuel du terme), et si f admet une limite l quand x tend vers 1, on dit que la série $\sum u_n$ converge au sens d'Abel vers l .

En fait, la fonction f est presque toujours définie sur $] -1, 1[$ (c'est notamment toujours le cas si (u_n) est bornée), et beaucoup de séries divergentes convergent au sens d'Abel. C'est par exemple le cas de notre série (T_n) : on pose alors $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(-x)^k = \frac{-x}{(1+x)^2}$ si $|x| < 1$ (c'est une série géométrique dérivée tout ce qu'il y a de plus classique). De plus, f admet bel et bien une limite en 1, égale à $-\frac{1}{4}$, ce qui justifie (au sens d'Abel) la valeur obtenue pour T . Il ne faut pas rêver, on n'obtiendra pas U de la même façon, car cette convergence vérifie le critère de « décalabilité ». Pour tenter de trouver une explication pour cette dernière valeur, on va rester dans le domaine des prolongements de fonction, mais en passant dans le domaine complexe :

Définition 10. La **fonction** ζ de Riemann est définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (la lettre grecque ζ est un « dzeta », l'équivalent de notre z).

Cette fonction est définie tout à fait rigoureusement et correctement à la condition que $\operatorname{Re}(s) > 1$ (la variable s étant ici un nombre complexe). En particulier, on notera que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;

$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Toutes les valeurs de la fonction ζ pour les entiers pairs sont bien connues depuis longtemps, et peuvent s'exprimer à l'aide des puissances paires de π et de nombres appelés nombres de Bernoulli qui sont très classiques en théorie des nombres (l'étude des nombres entiers). Curieusement, les valeurs pour les entiers impairs ne s'expriment pas du tout aussi simplement, et on sait même très peu de choses sur elles. On a par exemple simplement réussi à démontrer que $\zeta(3)$ était un nombre irrationnel en 1977. Quelques progrès ont été effectués depuis puisqu'on sait désormais qu'une infinité des valeurs prises par la fonction ζ pour les entiers impairs sont irrationnelles, mais on ne sait pas lesquelles (on soupçonne qu'elles le sont toutes) ! La fonction ζ est par ailleurs fondamentale pour de nombreux problèmes mathématiques, et intervient notamment de façon centrale dans l'étude des propriétés des nombres premiers. Sans chercher à rentrer dans les détails (si vous êtes vraiment motivés, un simple coup d'oeil à la page Wikipedia consacrée à cette fonction devrait vous faire très peur), citons simplement le plus célèbre problème posé par cette fonction, qui reste un problème ouvert à l'heure actuelle (si vous arrivez à démontrer cette conjecture, un million de dollars pour vous) :

Théorème 4. Hypothèse de Riemann : tous les nombres complexes annulant la fonction ζ ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

J'ai énoncé le résultat sous forme de théorème, mais j'insiste, ce n'en est pas un, mais une simple conjecture. On connaît des centaines de zéros de la fonction qui vérifient tous ce critère (et bien sûr aucun qui ne le vérifie pas). Je ne peux malheureusement pas vous expliquer beaucoup plus de choses sur cette fonction, si ce n'est qu'on peut la prolonger de façon unique (sous certaines conditions) en une fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et que ce prolongement vérifie en particulier (en gardant la même

notation pour la fonction prolongée) que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, ce qui reviendrait à dire que $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = -\frac{1}{2}$; et surtout que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, ce qui signifie que $\sum_{k=1}^{+\infty} k = -\frac{1}{12}$. La fonction prendra aussi, naturellement, des valeurs pour les autres entiers négatifs, ce qui donne par exemple $\zeta(-3) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 = \frac{1}{120}$. Allez, un dernier calcul absurde pour finir en beauté :

Pour changer, on souhaite désormais calculer un **produit** infini très divergent, à savoir $1 \times 2 \times 3 \times \dots = \prod_{k=1}^{+\infty} k$, ce qu'on va très logiquement noter $\infty!$. L'astuce pour le calcul de ce produit est de passer sous forme exponentielle : $\infty! = e^{\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)}$. Or, un calcul tout à fait banal nous permet de constater que $\zeta'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(k)e^{-s \ln(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{\ln(k)}{k^s}$. En particulier, $\zeta'(0) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)$. Ce qui tombe franchement bien, c'est que les innombrables relations faisant intervenir la fonction ζ permettent de prouver que $\zeta'(0)$ est en fait égal à $-\frac{1}{2} \ln(2\pi)$. On en déduit alors que $\infty! = e^{\frac{1}{2} \ln(2\pi)} = \sqrt{2\pi}$. Je crois qu'il est temps de clore ce chapitre sur ce résultat particulièrement fascinant.