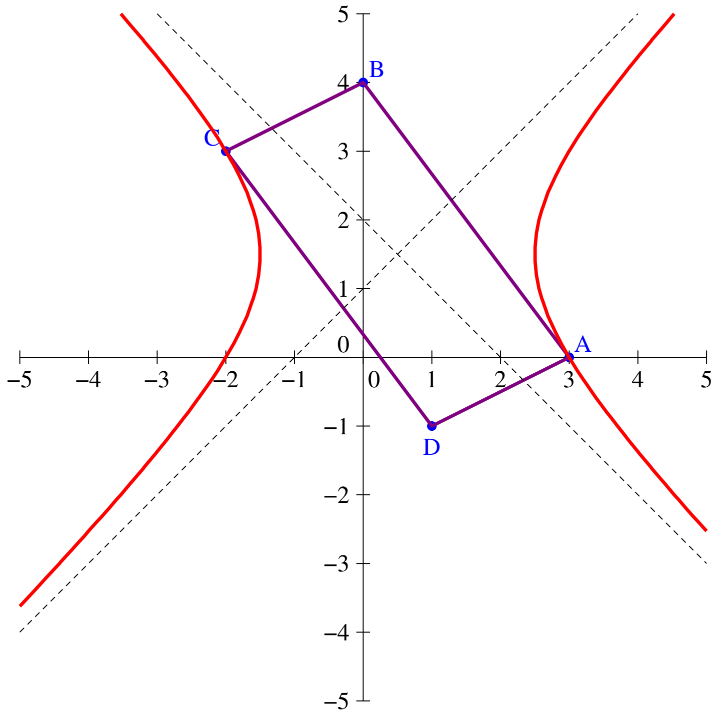
Exercice à travailler n° 9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 novembre 2020

Un exercice niveau Bac sur les complexes.

1. Voici le schéma demandé, avec en rouge l'ensemble de la dernière question :



2. Sur le schéma, on a bien l'impression qu'il s'agit d'un parallélogramme. On ne l'a pas encore rappelé en cours, mais pour le prouver, il suffit de constater que $z_B - z_A = z_C - z_D = 4i - 3$, ce qui prouve l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ et donc le fait que $ABCD$ est un parallélogramme. Bien sûr, on peut pousser jusqu'à vérifier que le quadrilatère n'est pas un rectangle, par exemple en calculant $\dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_D} = \dfrac{-3+4i}{2+i} = \dfrac{(-3+4i)(2-i)}{5} = \dfrac{-2+5i}{5}$. Ce nombre n'étant pas imaginaire pur, l'angle $\widehat{CDA}$ n'est pas droit (il correspond à l'argument du nombre complexe calculé), et notre quadrilatère n'est donc pas un rectangle.
3. On considère les deux équations $z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0$ (qu'on notera (E_1)) et $z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0$ (qu'on notera (E_2)).
   (a) Posons $z = a \in \mathbb{R}$, il sera solution de l'équation (E_1) si $a^2 - a - 3ai - 6 + 9i = 0$, ce qui ne peut se produire que si $a^2 - a - 6 = -3a + 9 = 0$. Le réel $a = 3$ vérifie manifestement ces deux équations, il est donc solution de l'équation. Cherchons maintenant un nombre $z = bi$ solution de (E_2), ce qui se produira si $-b^2 - bi + 3b + 4 + 4i = 0$, soit $-b^2 + 3b + 4 = -b + 4i = 0$. On constate que $b = 4$ est solution, donc $z = 4i$ est solution de l'équation (E_2).

(b) On peut par exemple exploiter le fait que le produit des racines d'une équation unitaire du second degré est égal à son coefficient constant. On en déduit immédiatement que la deuxième solution de (E_1) vaut $\dfrac{-6+9i}{3} = -2+3i$, et la deuxième solution de (E_2) vaut $\dfrac{4+4i}{4i} = 1-i$. Quelle surprise, on a retrouvé les quatre affixes des points donnés en début d'énoncé !

(c) Il s'agit donc de $z_0 = 1-i$. On calcule très facilement $|z_0| = \sqrt{2}$ puis $z_0 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

(d) Un nombre complexe z est situé sur cette droite si et seulement si son argument θ vérifie $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$. Or, $\arg(z_0^n) \equiv n\arg(z_0)[2\pi] \equiv -\dfrac{n\pi}{4}[2\pi]$. Il faut donc avoir $n \equiv 3[4]$ (la première puissance convenable est z_0^3, et on en retrouve une à chaque fois qu'on augmente la puissance de 4, ce qui revient à faire un demi-tour de cercle trigonométrique en termes d'argument).

4. On note f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i$.

(a) Posons donc brutalement $z = a + ib$, alors $f(z) = (a+ib)^2 - (1+3i)(a+ib) - 6 + 9i = a^2 - b^2 + 2iab - a - ib - 3ai + 3b - 6 + 9i$. La partie réelle de $f(z)$ est donc égale à $a^2 - b^2 - a + 3b - 6$, et sa partie imaginaire à $2ab - b - 3a + 9$.

(b) Il faut et il suffit que la partie réelle calculée ci-dessus soit nulle, et donc que $a^2 - a - b^2 + 3b - 6 = 0$. Il s'agit d'une équation d'hyperbole, donc le genre de choses que vous n'êtes pas censés être capables de reconnaitre. On peut s'en rendre compte en faisant quelques bidouilles à base de mises sous forme canonique : $\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(b - \dfrac{3}{2}\right)^2 = 4$, ou encore, en factorisant la différence de carrés à gauche, $(a+b-2)(a-b+1) = 4$. En posant $X = a+b-2$ et $Y = a-b+1$, on a donc l'équation $XY = 4$, ou encore $Y = \dfrac{4}{X}$, qui est bien une équation d'hyperbole (à un facteur 4 près, il s'agit de la courbe de la fonction inverse). Pour visualiser ces deux variales annexes, il suffit de tracer les droites d'équation $a+b-2=0$ (donc $y = 2-x$ en notation plus classique) et $a-b+1=0$ (soit $y = x+1$) qui vont correspondent aux axes du nouveau repère obtenu si on prend X et Y comme coordonnées. Autrement dit, ces deux droites seront les deux asymptotes de l'hyperbole, comme l'illustre le schéma de la première question (droites en pointillés noirs).