

Exercice à travailler n° 9

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 30 novembre 2020

Un exercice niveau Bac sur les complexes.

Dans le plan complexe, on considère les quatre points A , B , C et D d'affixes respectives 3 , $4i$, $-2 + 3i$ et $1 - i$.

1. Placer les quatre points sur une figure.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? On justifiera bien entendu la réponse.
3. On considère les deux équations $z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i = 0$ (qu'on notera (E_1)) et $z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i = 0$ (qu'on notera (E_2)).
 - (a) Montrer que l'une des deux équations admet une solution réelle, et l'autre une solution imaginaire pure.
 - (b) En déduire toutes les solutions de chacune des deux équations.
 - (c) Parmi les quatre solutions obtenues, on note z_0 celle dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme exponentielle de z_0 .
 - (d) Déterminer les entiers naturels n tels que le point d'affixe z_0^n soit sur la droite d'équation $y = x$.
4. On note f l'application définie sur \mathbb{C} par $f(z) = z^2 - (1 + 3i)z - 6 + 9i$.
 - (a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction de celles de z .
 - (b) Déterminer une équation de l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $M'(f(z))$ appartient à l'axe des ordonnées. Si vous avez du temps à perdre, essayez de trouver une méthode pour représenter graphiquement l'ensemble en question (mais c'est difficile).