Exercice à travailler n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2020

Une équation différentielle, avec tracé de courbe intégrale.

1. La normalisation de l'équation impose d'éliminer la valeur $x = 0$ (le facteur $1+\ln^2(x)$ ne pose pas de problème puisqu'il est strictement positif). De plus, la présence de ln dans l'équation limite déjà la résolution à $\mathbb{R}^+$. On va donc résoudre notre équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Après normalisation, on cherche à résoudre l'équation $y' + \dfrac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))} = \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}$ étant continue sur $]0, +\infty[$, elle y admet nécessairement des primitives. Comme elle de la forme $\dfrac{f'}{f}$, avec $f(x) = 1+\ln^2(x)$ (qui a bien pour dérivée $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$), on peut prendre comme primitive la fonction $x \mapsto \ln(1+\ln^2(x))$. Les solutions de l'équation homogène sont alors toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \dfrac{K}{1+\ln^2(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3. On va donc cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{1+\ln^2(x)}$, ce qui implique $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)(1+\ln^2(x)) - \frac{2K(x)\ln(x)}{x}}{(1+\ln^2(x))^2}$. La fonction est donc solution de (E) (en reprenant la forme initiale de l'équation) si $xK'(x) - \dfrac{2K(x)\ln(x)}{1+\ln^2(x)} + \dfrac{2\ln(x)K(x)}{1+\ln^2(x)} = 1$, donc si $K'(x) = \dfrac{1}{x}$. On peut choisir $K(x) = \ln(x)$, ce qui revient à dire que $y_p(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+\ln^2(x)}$.

4. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = \dfrac{\ln(x)+K}{1+\ln^2(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

5. En factorisant numérateur et dénominateur par $\ln(x)$, on peut écrire $y(x) = \dfrac{1+\frac{K}{\ln(x)}}{\ln(x)+\frac{1}{\ln(x)}}$ et il n'y a plus de forme indéterminée : indépendamment de la valeur de K, on a toujours $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

6. La condition initiale impose $K = 1$, donc $y(x) = \dfrac{\ln(x)+1}{1+\ln^2(x)}$. On notera f cette fonction pour l'étude de la dernière question.

7. Les limites de f ont déjà été calculée plus haut. De plus, f est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\frac{1+\ln^2(x)}{x} - \frac{2\ln^2(x)}{x} + \frac{2\ln(x)}{x}}{(1+\ln^2(x))^2} = \dfrac{1-2\ln(x)-\ln^2(x)}{x(1+\ln^2(x))^2}$. Cette dérivée est du signe de $1-2\ln(x)-\ln^2(x)$. En posant $X = \ln(x)$, on obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 8$, admettant pour racines $X_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{-2} = \sqrt{2}-1$ et $X_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{-2} =$

$-1-\sqrt{2}$. La dérivée s'annule donc lorsque $x = e^{\sqrt{2}-1}$ et $x = e^{-1-\sqrt{2}}$, et sera positive entre ces deux valeurs. On peut calculer $f(e^{\sqrt{2}-1}) = \dfrac{\sqrt{2}-1+1}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}-2} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. De même, $f(e^{-\sqrt{2}-1}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. On peut aussi calculer facilements les valeurs $f(e) = \dfrac{1+1}{1+1} = 1$, $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ et $f(1) = 1$ si on le souhaite. Voici le tableau de variations de la fonction :

x	0		$e^{-\sqrt{2}-1}$		$e^{\sqrt{2}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	0

Une allure de courbe, en bleu sur la figure. On a tracé dans d'autres couleurs les allures d'autres courbes intégrales associées à cette équation, ce qui n'était pas demandé dans l'énoncé ($K = 0$ en rouge, $K = -2$ en orange, $K = 2$ en violet et $K = 4$ en marron) :