Exercice à travailler n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 novembre 2020

Un peu de technique sur les sommes télescopiques.

1. On aurait du mal à faire démarrer la somme avant dans la mesure où le dénominateur de la fraction s'annule lorsque $k = 1$. On calcule donc $S_2 = \frac{1}{8+8-2-2} = \frac{1}{12}$, puis $S_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{27+18-3-2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{40} = \frac{10+3}{120} = \frac{13}{120}$, et enfin $S_4 = \frac{13}{120} + \frac{1}{64+32-4-2} = \frac{13}{120} + \frac{1}{90} = \frac{39+4}{360} = \frac{43}{360}$.
2. On a déjà vu à la question précédente que 1 était racine évidente de l'équation. On peut donc écrire $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a = 1$, puis $b - a = 2$ donc $b = 3$, et $c - b = -1$ donc $c = 2$. Le deuxième facteur $x^2 + 3x + 2$ se factorise de façon assez immédiate en $(x+1)(x+2)$ (mais on peut calculer un discriminant si on le souhaite pour retrouver les deux dernières solutions de l'équation, qui sont donc -1 et -2).
3. On cherche donc à écrire $\frac{1}{k^3+2k^2-k-2} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ $= \frac{a(k+1)(k+2) + b(k-1)(k+2) + c(k-1)(k+1)}{(k-1)(k+1)(k+2)} = \frac{a(k^2+3k+2) + b(k^2+k-2) + c(k^2-1)}{k^3+2k^2-k-2} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+b)k + 2a - 2b - c}{k^3+2k^2-k-2}$. Si on veut que notre numérateur soit égal à 1, l'identification des coefficients impose les conditions $a + b + c = 0$, $3a + b = 0$ et $2a - 2b - c = 1$. On doit donc avoir $b = -3a$, puis $c = -a - b = 2a$, ce qui donne pour la dernière condition $2a + 6a - 2a = 1$, soit $a = \frac{1}{6}$. On en déduit $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}$, soit $\frac{1}{k^3+2k^2-k-2} = \frac{1}{6(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{3(k+2)}$.
4. Allons-y pour le télescopage : $S_n = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{3}\sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6}\left(\sum_{k=4}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=4}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=4}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)} = \frac{5}{36} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)}$.
5. Manifestement, la suite (S_n) tend vers $\frac{5}{36}$. Dans la mesure où la suite est croissante (on ajoute à chaque nouvelle étape un terme strictement positif), et où les premières valeurs calculées sont toutes (légèrement) inférieures à $\frac{5}{36}$, ce résultat semble cohérent.
6. Démontrons donc par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3+2k^2-k-2} = \frac{5}{36} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)}$.

On initialise au rang 2, où on a déjà calculé le membre de gauche qui vaut $\frac{1}{12}$. Comme celui de droite est égal à $\frac{5}{36} - \frac{1}{12} - \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, la propriété P_2 est vérifiée.

Supposons maintenant P_n vraie, et calculons $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^3 + 2(n+1)^2 - (n+1) - 2} = \frac{5}{36} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)} + \frac{1}{(n+1)^3 + 2(n+1)^2 - (n+1) - 2}$ par hypothèse de récurrence. Or, on a prouvé à la question 3 que $\frac{1}{k^3 + 2k^2 - k - 2} = \frac{1}{6(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{3(k+2)}$ pour tout entier k. On peut donc appliquer cette formule à $k = n+1$ pour obtenir $\frac{1}{(n+1)^3 + 2(n+1)^2 - (n+1) - 2} = \frac{1}{6n} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)}$, et en déduire que $S_{n+1} = \frac{5}{36} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)} = \frac{5}{36} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)}$. Incroyale mais vrai, on a exactement obtenu la propriété P_{n+1}, ce qui achève la démonstration par récurrence.