Exercice à travailler n$^{\text{o}}$ 5

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 12 octobre 2020

Un classique faisant intervenir les fonctions circulaires réciproques.

1. La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, de dérivée $u'(x) = \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$, qui est clairement négative sur les deux intervalles de définition de u. La quotient des termes de plus haut degré permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$. Enfin, comme le numérateur de la fraction tend vers 2 quand x tend vers -1, on obtient facilement $\lim\limits_{x \to -1^-} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} u(x) = +\infty$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
u	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

2. Pour que f soit définie, on doit avoir $u(x) \in [-1, 1]$. En constatant habilement que $u(0) = 1$, l'étude effectuée à la question précédente permet d'affirmer que $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$ (on cite le théorème de la bijection si on veut être très rigoureux). Par contre, comme arccos n'est pas dérivable en 1 et en -1, la fonction f ne sera a priori pas dérivable aux endroits où $u(x) = \pm 1$. Cela ne se produit que pour $x = 0$, donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

3. Calculons : $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \dfrac{2}{(1+x)^2\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}}$. Sur l'intervalle de définition de f, l'expression $1+x$ est toujours positive, donc $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)\sqrt{(1+2x+x^2)-(1-2x+x^2)}} = \dfrac{2}{(1+x)\sqrt{4x}} = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$. Les variations de f sont opposées à celles de u (le calcul de dérivée n'était même pas nécessaire pour le savoir), avec $f(0) = \arccos(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$. Voici le tableau demandé :

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	π

4. On obtient très facilement $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$, ce qui signifie qu'il y aura une tangente verticale à la courbe à l'origine.

5. On calcule à nouveau : $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{f'(x)}{2}$. Notons en passant que, tout comme f, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

6. L'égalité précédente prouve que, $\forall x > 0$, $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x})+k$, pour une certaine constante $k \in \mathbb{R}$. Par continuité, cette égalité restera vraie pour $x = 0$, et on doit donc avoir $f(0) = 0 = k$, donc $k = 0$ et $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x})$ (on peut aussi calculer la valeur en 1 pour retrouver la constante k).
7. La courbe met un certain temps à se rapprocher de son asymptote horizontale :