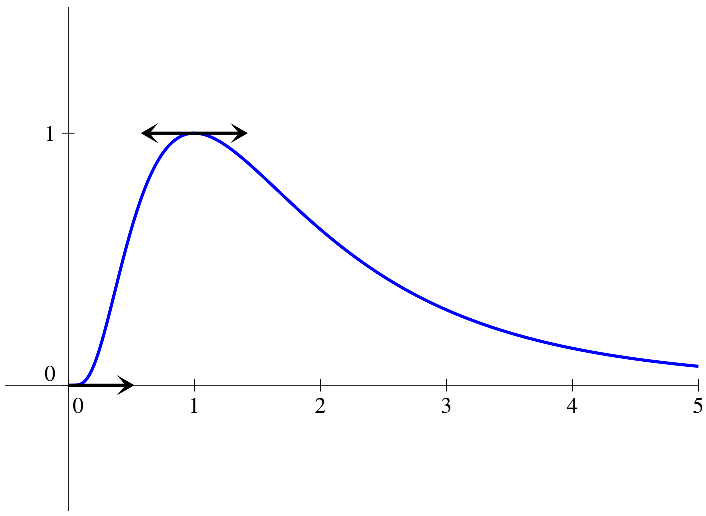
Exercice à travailler n° 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 octobre 2020

Deux exercices pour le prix d'un.

1. On commence bien sûr par écrire f sous forme exponentielle : $f(x) = e^{-\ln^2(x)}$. La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{-2\ln(x)}{x}e^{-\ln^2(x)}$, qui est du signe de $-\ln(x)$. La fonction f est donc décroissante sur $[1, +\infty[$ et croissante sur $]0, 1]$, admettant en 1 un minimum de valeur $f(1) = e^0 = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln^2(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} -\ln^2(x) = -\infty$, donc on a aussi une limite nulle en 0. Avec un peu de courage, on peut tenter de calculer la limite en 0 de $f'(x)$ pour savoir s'il y a une tangente remarquable à cet endroit. On pose pour cela $X = \ln(x)$ (qui aura donc pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0) et on écrit $f'(x) = -\dfrac{2X}{e^X}e^{-X^2} = -2Xe^{-X^2-X}$. On aura $\lim\limits_{X\to-\infty} -X^2 - X = -\infty$, et une croissance comparée permet alors de conclure que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. On aura donc à l'origine une tangente horizontale pour notre courbe, que voici :



2. (a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et trivialement croissante comme somme de deux fonctions strictement croissantes. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (pas la moindre forme indéterminée à l'horizon), la fonction g (étant bien sûr continue) est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, elle s'annule en une unique valeur α, et on aura donc $g(x) < 0$ si $x < \alpha$, et $g(x) > 0$ si $x > \alpha$.

   (b) Un point appartenant à la courbe a pour coordonnées (x, e^x), le carré de sa distance à l'origine vaut donc $d(x) = x^2 + (e^x)^2 = x^2 + e^{2x}$. Cette fonction d est dérivable de dérivée $d'(x) = 2x + 2e^{2x} = 2g(x)$. La question précédente montre que cette dérivée est négative sur $]-\infty, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, +\infty[$, ce qui prouve que la fonction d admet un minimum en

α, qui correspond au minimum de la distance entre la courbe de l'exponentielle et l'origine (mais qu'on n'est donc pas capables de calculer !).

(c) Par définition, on a $M(\alpha, e^\alpha)$, avec $g(\alpha) = \alpha + e^{2\alpha} = 0$. La tangente à la courbe de l'exponentielle en son point d'abscisse α a pour coefficient directeur e^α (valeur de la dérivée de la fonction exponentielle en α), et la droite (OM) a pour coefficient directeur $\dfrac{e^\alpha}{\alpha}$. Le produit de ces deux coefficients directeurs est donc égal à $\dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha} = -\dfrac{\alpha}{\alpha} = -1$, ce qui prouve que les deux droites sont bien orthogonales.