

Exercice à travailler n° 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2020

Étude d'une fonction faisant intervenir une valeur absolue.

1. Manifestement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La fonction f n'est ni paire ni impaire. Par exemple $f(1) = \left| \frac{-2}{-1} \right| = 2$, et $f(-1) = \left| \frac{0}{-3} \right| = 0$. Ces deux valeurs n'étant ni égales ni opposées, la fonction ne peut être ni paire ni impaire.

2. On a déjà calculé $f(-1) = 0$. Calculons les autres valeurs demandées : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left| \frac{-3}{-\frac{3}{2}} \right| = 2$;

$$\text{puis } f(\sqrt{3}) = \left| \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} \right| = \frac{(3 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{|3 - 4|} = 3 + \sqrt{3}.$$

3. On cherche donc à résoudre l'équation $|2x^2 - x - 3| = |x - 2|$, qui se décompose en deux équations du second degré : soit on a $2x^2 - x - 3 = x - 2$, donc $2x^2 - 2x - 1 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 8 = 12$, et admet donc deux racines réelles, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{4} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$; soit on a $2x^2 - x - 3 = 2 - x$, donc $2x^2 - 5 = 0$, ce qui donne les deux derniers antécédents $x_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ et $x_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Pour l'inéquation, même méthode, mais en résolvant des inéquations, donc en faisant un joli « tableau de signe » : on veut que $|x^2 - x - 3| - 4|x - 2| \geq 0$. Le trinôme dans la première valeur absolue a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet donc pour racines $x_5 = \frac{1 - 5}{4} = -1$

(sans surprise vu le calcul de la question 2), et $x_6 = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}$. L'autre valeur absolue s'annule bien entendu lorsque $x = 2$, d'où le tableau d'expressions suivant :

x	-1	$\frac{3}{2}$	2
$ 2x^2 - x - 3 $	$2x^2 - x - 3$	$x + 3 - 2x^2$	$2x^2 - x - 3$
$4 x - 2 $	$8 - 4x$	$8 - 4x$	$4x - 8$
$ 2x^2 - x - 3 - 4 x - 2 $	$2x^2 + 3x - 11$	$5x - 5 - 2x^2$	$2x^2 + 3x - 11$

On n'a en fait que deux inéquations différentes à résoudre :

- sur $] -\infty, -1]$ et sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $2x^2 + 3x - 11$ a pour fort sympathique discriminant $\Delta = 9 + 88 = 97$, et admet comme racines $x_a = \frac{-3 - \sqrt{97}}{4}$ et $x_b = \frac{-3 + \sqrt{97}}{4}$. Il n'est pas difficile de se convaincre que $x_a < -1$ et $\frac{3}{2} < x_b < 2$ (puisque $\sqrt{97}$ est compris entre 9 et 10), on conserve donc les solutions appartenant à $] -\infty, x_a]$ et à $[x_b, 2]$.
- sur les deux autres intervalles, le trinôme $2x^2 - 5x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 40 < 0$, donc $2x^2 - 5x + 5$ est toujours positif, et notre inégalité n'est jamais vérifiée sur $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$, mais l'est toujours sur $]2, +\infty[$.

Conclusion de ces passionnants calculs : $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{-3 - \sqrt{97}}{4} \right] \cup \left[\frac{-3 + \sqrt{97}}{4}, +\infty \right[\setminus \{2\}$.

4. On va bien sûr faire un tableau de signes, en reprenant des calculs effectués à la question précédente :

x	-1		$\frac{3}{2}$		2	
$2x^2 - x - 3$	+	0	-	0	+	+
$x - 2$	-		-		-	0
$h(x)$	-	0	+	0	-	+

5. On va bien sûr dériver la fonction h (qui est dérivable partout où elle est définie) : $h'(x) = \frac{(4x-1)(x-2) - (2x^2-x-3)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+5}{(x-2)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui a pour discriminant $\Delta = 64 - 40 = 24$, et s'annule donc en $x_7 = \frac{8 - \sqrt{24}}{4} = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$, et en $x_8 = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$. Ces deux valeurs vérifiant par définition $2x^2 = 8x - 5$, on peut en déduire que $h(x_7) = \frac{8x_7 - 5 - x_7 - 3}{x_7 - 2} = \frac{14 - \frac{7\sqrt{6}}{2} - 8}{-\frac{\sqrt{6}}{2}} = 7 - 2\sqrt{6}$. De même, $h(x_8) = \frac{7x_8 - 8}{x_8 - 2} = \frac{6 + \frac{7\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = 7 + 2\sqrt{6}$. On peut alors dresser le magnifique tableau de variations suivant (les calculs de limite ne posent aucun problème, en exploitant le quotient des termes de plus haut degré en $\pm\infty$, et en utilisant les signes étudiés à la question précédente pour les autres limites) :

x	$-\infty$	-1	x_7	$\frac{3}{2}$	2	x_8	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	0	-	-	-	+
h	$-\infty$		$7 - 2\sqrt{6}$		$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$		$7 - 2\sqrt{6}$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

6. Calculons donc simplement $h(x) - (2x+3) = \frac{2x^2 - x - 3 - (2x+3)(x-2)}{x-2}$
 $= \frac{2x^2 - x - 3 - (2x^2 - x - 6)}{x-2} = \frac{3}{x-2}$, qui tend effectivement vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Ceci signifie exactement que la droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de h , et donc à celle de f puisque celles-ci sont confondues du côté de $+\infty$.

La limite de $h(x) - (2x+3)$ est tout autant nulle du côté de $-\infty$, mais cette fois-ci on a $f(x) = -h(x)$ au voisinage de $+\infty$ (sur tout l'intervalle $] -\infty; -1]$, donc la courbe représentative de f admettra pour asymptote du côté de $-\infty$ la droite d'équation $y = -2x - 3$.

7. Quelques valeurs approchées utiles pour le tracé : $\sqrt{3} \simeq 1.7$, donc $x_1 \simeq -0.35$ et $x_2 \simeq 1.35$; comme $\frac{5}{2} \simeq 2.56$, on aura $x_3 \simeq 1.6$ et $x_4 \simeq -1.6$; enfin, $\sqrt{6} \simeq 2.4$ donc $x_7 \simeq 0.8$, $x_8 \simeq 3.2$, $f(x_7) \simeq 2.2$ et $f(x_8) \simeq 11.8$. Les asymptotes ne sont pas indiquées sur la courbe qui suit (il faut un dessin à grande échelle pour vraiment tout bien voir) :

