

Exercice de la semaine n°26

PTSI B Lycée Eiffel

15 juin 2021

Cercles remarquables dans un triangle.

On se place pour tout l'exercice dans un repère orthonormal, dans lequel sont situés les trois points $A(-1, -1)$, $B(2, 2)$ et $C(3, -1)$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure avec tous les points, droites et cercles évoqués dans l'exercice (évitez de prendre un millimètre comme unité pour votre repère).
2. Donner les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .
3. Donner les équations des médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$. En déduire les coordonnées du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC . On donnera également une équation cartésienne de ce cercle, ainsi que son rayon.
4. Donner les équations de deux hauteurs du triangle ABC , en déduire les coordonnées de son orthocentre H .
5. Vérifier que H , G et O sont alignés et que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$ (cf la remarque du cours sur la droite d'Euler).
6. Calculer les coordonnées des symétriques de H par rapport aux milieux des côtés du triangle et vérifier qu'ils appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC .
7. Faire de même avec les symétriques de ce même point H par rapport aux côtés du triangle (cf la remarque du cours).
8. Calculer les coordonnées du point F , milieu du segment $[OH]$, et donner une équation du cercle de centre F et de rayon égal à la moitié de celui du cercle circonscrit à ABC (cercle des neuf points, cf la remarque dans le cours).
9. Vérifier que les points suivants sont bien situés sur le cercle des neuf points : les milieux des côtés du triangle, les milieux des segments reliant H aux sommets du triangle, et les pieds des trois hauteurs du triangle.