Exercice à travailler n°24

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 31 mai 2021

Des matrices de projections et de symétries.

On considère pour cette exercice l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z, -3x - 2y - z, \frac{9}{2}x + 3y + \frac{3}{2}z\right)$.

1. Donner la matrice M de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer M^2. Que peut-on en déduire concernant l'application f ?
3. Déterminer les éléments caractéristiques de f, ainsi qu'une base de chacun de ces deux sous-espaces.
4. On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en regroupant les bases calculées à la question précédente. Que vaut $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$? Normalement, presque aucun calcul n'est nécessaire pour obtenir cette matrice.
5. En notant s la symétrie par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\text{Im}(f)$, quelle serait la matrice de s dans cette même base $\mathcal{B}$ (toujours pas de calcul nécessaire) ? Et dans la base canonique ?