Exercice à travailler n^{o} 23

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 24 mai 2021

Des classiques sur les endomorphismes.

Cette semaine, comme vous ~~êtes des quiches intersidérales en algèbre linéaire~~ n'avez rien eu la semaine dernière, vous avez droit à deux exercices pour le prix d'un.

Exercice 1 : Un tout petit peu de manipulation de projecteurs.

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \mid y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \mid x-y = z - 2y = 0\}$.

1. Donner la dimension et une base de F et de G.
2. Vérifier que F et G sont supplémentaires.
3. On note p la projection sur F parallèlement à G. Calculer l'image par p du vecteur $u(x, y, z)$.

Exercice 2 : Des exemples d'endomorphismes nilpotents.

Un endomorphisme f est nilpotent s'il existe un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $f^n = 0$. Il s'agit donc de la même définition que pour les matrices, mais attention, la « puissance » ici n'en est pas vraiment une, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (de toute façon, un produit d'applications linéaires n'aurait aucun sens). On va voir dans le chapitre 19 qu'un endomorphisme entre espaces vectoriels de dimension finie est nilpotent si et seulement la matrice qui le représente est elle-même nimpotente. Bien sûr, vous n'aurez pas besoin de ça pour traiter l'exercice.

1. On pose dans cette question $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (z - x, 3x + y - 2z, x + y) \end{array} \right.$. On admet que cette application est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer le noyau de f (on précisera sa dimension).
   (b) Déterminer l'image de f (on donnera aussi sa dimension).
   (c) Calculer l'expression explicite de $f^2(x, y, z)$.
   (d) Déterminer le noyau de f^2, puis vérifier que $\ker(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.
   (e) En déduire que $f^3 = 0$, et donc que f est nilpotent.
2. On pose dans cette question $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (0, x, y, z) \end{array} \right.$.
   (a) Vérifier que f est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^4$ (sans faire des millions de calcul).
   (b) Définir un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^n$ en prenant f pour exemple.
3. On pose dans cette question $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & Q(X) = P(X + 1) - P(X) \end{array} \right.$.
   (a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f. Sont-ils supplémentaires ?
   (c) Montrer que f est nilpotent.
   (d) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n([X])$ défini de la même façon que f est-il toujours nilpotent ? Expliquer rapidement pourquoi.