

Exercice à travailler n° 22 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 11 mai 2021

Des histoires très originales de boules dans des urnes.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n , contenant chacune n boules. On effectue plusieurs tirages successifs de la façon suivante : à chaque tirage on tire de façon équiprobable une des urnes, puis on tire (de façon équiprobable également) une des boules de l'urne, sans remettre la boule dans l'urne après le tirage. Bien entendu, si l'urne choisie est vide car on a déjà tiré toutes ses boules, on passe au tirage suivant.

1. Uniquement dans cette question, on suppose que $n = 2$ et on note A_k l'événement « les deux urnes sont vides à l'issue des k premiers tirages ». Calculer les probabilités des événements A_3 , A_4 , A_5 et A_6 .
2. On suppose désormais qu'on a effectué exactement n tirages (le même n que le nombre d'urnes et de boules dans chaque urne, donc) et on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si l'urne numéro i contient toujours n boules après ces n tirages, et 0 sinon.
 - (a) Déterminer la loi de la variable X_i .
 - (b) En posant $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$, déterminer l'espérance de la variable Y_n , puis trouver un équivalent simple de $E(Y_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Que représente concrètement la variable Y_n ?
 - (c) Déterminer explicitement la loi de la variable Y_4 .
3. On note désormais N_1 le nombre de boules restant dans l'urne numéro 1 à l'issue des n tirages.
 - (a) Déterminer la loi de N_1 , son espérance et sa variance (on pourra exploiter une loi usuelle).
 - (b) Que peut-on dire de la variable $N_1 \times X_1$?