Exercice à travailler n$^{\text{o}}$ 21 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 avril 2021

Cette semaine : calcul brutal.

1. On sait que $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5+o(x^5)$. On peut bien entendu composer ce DL par le changement de variable $u=2x$ pour obtenir $\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+\frac{7}{8}x^5+o(x^5)$, mais aussi par le changement de variable $u=x^2$ qui donne $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^5)$ (pas besoin d'aller aussi loin pour celui-là). Il ne reste plus qu'à additionner : $\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x^2}=x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{7}{8}x^5+o(x^5)$.
2. Un simple produit de DLs vus en cours ici : $f(x)=\ln(1+x)\sin(x)=\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)=x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{4}x^5-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{12}x^5+o(x^5)=x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)$.
3. Cette fois, il s'agit d'une composée là aussi assez classique : $\sin(x-\arctan(x))=\sin\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)\right)$. On pose $u=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$, et on se rend alors compte qu'il suffira de développer le sinus à l'ordre 1 (le terme de plus petit degré qui apparaitrait ensuite serait du x^9, on a de la marge !), donc on a simplement $\sin(x-\arctan(x))=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$.
4. Là encore, une composée, mais il faut d'abord « simplifier » les x à l'intérieur du ln, ce qui force à développer le sinus jusqu'à l'ordre 6 (ce qui en l'occurrence ne change strictement rien puisque la fonction est impaire !) : $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^5)\right)$. On est bien obligés de poser $u=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^5)$ et de calculer $u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$ (on n'a heureusement pas besoin d'aller plus loin pour obtenir de l'ordre 5), soit $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{72}x^4+o(x^5)=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+o(x^5)$.
5. Effectuons donc les trois calculs demandés dans l'ordre de l'énoncé :
   - $\sin(x)\cos(x)=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\right)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{24}x^5+o(x^5)=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.
   - f est la dérivée de la fonction $g : x\mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x)$, on commence donc par calculer son DL, mais attention, il faut aller jusqu'à l'ordre 6 car la dérivation va faire perdre un degré : $\sin^2(x)=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)^2=x^2+\frac{1}{36}x^6-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{60}x^6+o(x^6)=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^6)$, ce qui donne bien $f(x)=\frac{1}{2}g'(x)=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

- Encore plus simplement, on sait que $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$. Or, obtenir le DL de $\sin(2x)$ est trivial à partir de celui du sinus : $\sin(2x) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4}{15}x^5 + o(x^5)$, ne reste plus qu'à diviser par 2 pour retrouver une troisième fois la même formule.

6. On est obligés de commencer par écrire la fonction sous forme exponentielle avant d'utiliser une composée : $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}\ln(1+x)}$. Commençons donc par développer $\ln(f(x)) = \dfrac{1}{1+x}\ln(1+x) = (1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+o(x^5))\left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right) = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{2}x^5 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{1}{3}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{4}x^5 + \dfrac{1}{5}x^5 + o(x^5) = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \dfrac{137}{60}x^5 + o(x^5)$. Il ne reste plus qu'à nommer u cette horreur et faire notre composée par l'exponentielle, en craignant d'avoir des résultats complètement horribles, mais en fait ça ne va pas être le cas : $f(x) = e^u = 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{6}u^3 + \dfrac{1}{24}u^4 + \dfrac{1}{120}u^5 + o(u^5) = 1 + x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \dfrac{137}{60}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{9}{8}x^4 - \dfrac{3}{2}x^3 + \dfrac{11}{6}x^4 - \dfrac{25}{12}x^5 - \dfrac{11}{4}x^5 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{3}{4}x^4 + \dfrac{11}{12}x^5 + \dfrac{9}{8}x^5 + \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{4}x^5 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, soit $f(x) = 1 + x - x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{3}{4}x^5 + o(x^5)$. La simplification du dernier terme en particulier est assez spectaculaire, mais honnêtement je ne vois pas de méthode évidente pour obtenir plus rapidement ce résultat...
Ahhhhh mais je n'avais demandé qu'un DL_4 et pas un DL_5, qu'est-ce que je suis sympa quand même.

7. Pour celui-ci, on va utiliser la méthode décrire en cours pour les réciproques. On sait que la réciproque de sh est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc un DL au voisinage de 0 de la forme $\mathrm{Argsh}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$. On sait par ailleurs que $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, on peut donc composer les deux pour obtenir $x = \mathrm{Argsh}(\mathrm{sh}(x)) = ax + \dfrac{a}{6}x^3 + \dfrac{a}{120}x^5 + bx^3 + \dfrac{b}{2}x^5 + cx^5 + o(x^5)$. L'unicité de la partie régulière d'un DL impose que cette expression (du moins sans le $o(x^5)$) est égale à x, donc que $a = 1$, puis $b + \dfrac{a}{6} = 0$, donc $b = -\dfrac{a}{6} = -\dfrac{1}{6}$, et enfin $c + \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{120} = 0$, donc $c = -\dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{120} = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{120} = \dfrac{3}{40}$. On peut conclure : $\mathrm{Argsh}(x) = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)$.