Exercice à travailler n° 19 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 mars 2021

Le jeu du sous-espace vectoriel, le retour !

- F_1 n'est évidemment pas un sous-espace vectoriel, puisque le polynôme nul n'en fait pas partie. Il n'est par ailleurs pas stable par produit par un réel (la valeur en 0 sera multipliée par λ si P est multiplié par λ), ni par somme (on aurait $(P + Q)(0) = 6$).
- F_2 par contre est bien un sous-espace vectoriel. Si $P(3) = 0$, alors $\lambda P(3) = 0$, et si deux polynômes vérifiant $P(3) = Q(3) = 0$ on aura certainement $(P + Q)(3) = 0$.
- F_3 est aussi un sous-espace vectoriel, la condition donnée revient à dire que $P(0) \in \mathbb{R}$, ce qui est vérifié par le polynôme nul, et certainement stable par somme et produit par un réel.
- En fait, ça marche comme pour F_3 : le coefficient de degré 2 de $P + Q$ est la somme de ceux de P et de Q (si on avait besoin d'une stabilité par produit de polynômes, ce ne serait pas bon, contrairement à la condition définissant F_3).
- Encore un sous-espace vectoriel ! Oui, le polynôme nul est divisible par tout ce qu'on veut (avec un quotient nul). Si P est divisible par $X^2 - X + 2$, λP aussi (le quotient sera simplement multiplié par λ), et de même pour $P + Q$ (si on veut on peut écrire $P = (X^2 - X + 2)A$ et $Q = (X^2 - X + 2)B$, alors $P + Q = (X^2 - X + 2)(A + B)$).
- Ah, en voilà un qui n'est pas un sous-espace vectoriel. Il est stable par produit par une constante, mais pas par somme. Pour prendre un exemple facile, le polynôme X^2 n'a que des racines réelles (une seule en fait, la racine double 0), et le polynôme 1 n'a que des racines réelles puisqu'il n'en a aucune, pourtant la somme $X^2 + 1$ a des racines complexes. On pouvait aussi simplement dire que le polynôme nul ne vérifie pas la condition (puisque tous les nombres, y compris les complexes, sont racines du polynôme nul).
- Là encore, on obtient un ensemble qui n'est pas un sous-espace vectoriel car pas stable par somme. Par exemple, $P = X^2$ a une racine réelle, $Q = X + 1$ aussi, mais $P + Q = X^2 + X + 1$ a un discriminant strictement négatif, donc pas de racine réelle.
- La condition donnée n'est a priori pas stable par produit (si on multiplie P par λ , le membre de gauche sera multiplié par λ , et celui de droite par λ^3), sauf si P est le polynôme nul. Or, il existe d'autres éléments que le polynôme nul dans l'ensemble F_8 , par exemple le polynôme constant égal à 1. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel.
- Un polynôme P est divisible par P' si et seulement si il n'admet qu'une seule racine (donc s'il est de la forme $k(X - a)^n$, vous réfléchirez à la démonstration entre deux DM de physique). Cette condition n'est pas stable par somme. Ainsi, $P = X^2$ est divisible par son dérivé $2X$, $Q = X^3$ est divisible par son dérivé $3X^2$, mais $P + Q = X^3 + X^2$ n'est pas du tout divisible par $3X^2 + 2X$: $X^3 + X^2 = (3X^2 + 2X) \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{9} \right) - \frac{2}{9}X$, le reste n'est pas nul.
- La condition revient à dire que tous les entiers compris entre 1 et 10 sont racines (au moins) doubles de P . C'est une condition stable par produit par un réel et par somme (on aura $(P + Q)'(i) = P'(i) + Q'(i) = 0$), donc F_{10} est un sous-espace vectoriel.