

Exercice à travailler n° 19

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 22 mars 2021

Le jeu du sous-espace vectoriel, le retour !

On note pour tout cet exercice $E = \mathbb{C}[X]$, qui est bien sûr un espace vectoriel réel (et aussi complexe, mais ce n'est pas sujet ici). Pour chacun des sous-ensembles suivants, déterminer s'il s'agit ou non d'un espace vectoriel. Si la réponse est oui, une démonstration est attendue. Si la réponse est non, un contre-exemple suffira bien entendu.

- $F_1 = \{P \in E \mid P(0) = 3\}$
- $F_2 = \{P \in E \mid P(3) = 0\}$
- $F_3 = \{P \in E \mid P \text{ a un coefficient constant réel}\}$
- $F_3 = \{P \in E \mid P \text{ a un coefficient de degré 2 réel}\}$
- $F_5 = \{P \in E \mid P \text{ est divisible par } X^2 - X + 2\}$
- $F_6 = \{P \in E \mid P \text{ n'a que des racines réelles}\}$
- $F_7 = \{P \in E \mid P \text{ admet au moins une racine réelle}\}$
- $F_8 = \{P \in E \mid P(X^3) = P(X-1)P(X)P(X+1)\}$
- $F_9 = \{P \in E \mid P \text{ est divisible par } P'\}$
- $F_{10} = \{P \in E \mid \forall i \in \{1, \dots, 10\}, P(i) = P'(i) = 0\}$